ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Walid Aloulou

Les (a, b)-algèbres à homotopie près

Volume 17, n° 1 (2010), p. 97-151.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2010__17_1_97_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **17**, 97-151 (2010)

Les (a, b)-algèbres à homotopie près

Walid Aloulou

Résumé

On étudie dans cet article les notions d'algèbre à homotopie près pour une structure définie par deux opérations $\centerdot$ et $[\ ,\ ]$. Ayant déterminé la structure des G_∞ algèbres et des P_∞ algèbres, on généralise cette construction et on définit la stucture des (a, b)-algèbres à homotopie près. Etant donnée une structure d'algèbre commutative et de Lie différentielle graduée pour deux décalages des degrés donnés par a et b, on donnera une construction explicite de l'algèbre à homotopie près associée et on précisera la relation entre les (a, b)-algèbres et les algèbres sur l'homologie de l'opérade des petits cubes en toute dimension.

Abstract

We study in this article the concepts of algebra up to homotopy for a structure defined by two operations $\centerdot$ and $[\ ,\ ]$. Having determined the structure of G_∞ algebras and P_∞ algebras, we generalize this construction and we define a structure of (a, b)-algebra up to homotopy. Given a structure of commutative and differential graded Lie algebra for two shifts degree given by a and b, we will give an explicit construction of the associate algebra up to homotopy and we clarify the relationship between (a, b)-algebra and algebra over the operad of little $n+1$-dimensional cubes.

1. Introduction

Considérons une algèbre $\mathcal{A}$ pour une opération m (m est par exemple une multiplication associative ou un crochet de Lie) munie d'une différentielle d. On dira juste que $\mathcal{A}$ est une algèbre de type $\mathcal{P}$. Dans beaucoup de cas, on sait définir la notion d'algèbre de type $\mathcal{P}$ à homotopie près et construire l'algèbre à homotopie près enveloppante de $\mathcal{A}$. Précisément, on fixe un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0 et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$, on lui associe canoniquement une cogèbre graduée $(\mathcal{U}_\mathcal{P}(\mathcal{A}), \Delta)$. Une structure de

Mots-clés : Algèbres homotopiques, cogèbres, algèbres de Poisson, algèbres différentielles graduées.

Classification math. : 18G55,16W30,17B63, 16E45.

$\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près sur $\mathcal{A}$ est équivalente à la donnée d'une codérivation $Q : (\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}), \Delta) \longrightarrow (\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}), \Delta)$ de degré 1 et de carré nul (c'est à dire que Q est une codifférentielle). De plus, si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{P}$-algèbre, il existe une structure canonique de $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près sur $\mathcal{A}$, c'est à dire, une codifférentielle Q_{can} sur $\big(\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}), \Delta\big)$. La cogèbre codifférentielle $(\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A}), \Delta, Q_{can})$ est appelée la $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près enveloppante de $\mathcal{A}$. Cette algèbre donne naturellement les complexes d'homologie et de cohomologie associés à ce type d'algèbre pour $\mathcal{A}$ et ses modules (voir [2]).

Lorsque $\mathcal{A}$ possède deux opérations avec des relations de compatibilité, la construction de l'algèbre à homotopie près enveloppante correpondante est plus difficile. En particulier, le complexe de Poisson et celui de Gerstenhaber consiste à composer les structures de la cogèbre cocommutative colibre et de la cogèbre de Lie colibre associées à chaque algèbre. On obtient une bicogèbre codifférentielle colibre. Cette composition tient compte des degrés. Les structures de bicogèbre obtenues diffèrent. La bicogèbre codifférentelle ainsi obtenue à partir d'une algèbre de Poisson (respectivement de Gerstenhaber) $\mathcal{A}$ définit la structure de $\mathcal{P}_\infty$ algèbre (respectivement de G_∞ algèbre) canonique de $\mathcal{A}$.

Le présent travail consiste à unifier ces constructions d'algèbre à homotopie près dans les cas des algèbres de Poisson et des algèbres de Gerstenhaber, ce qui nous permet de définir la structure d'une (a, b)-algèbre à homotopie près. Disons qu'une (a, b)-algèbre différentielle est un espace vectoriel gradué $\mathcal{A}$ muni d'un produit commutatif $\centerdot$ de degré $a \in \mathbb{Z}$ ($|\centerdot| = a$), d'un crochet $[\ ,\ ]$ de degré $b \in \mathbb{Z}$ ($|[\ ,\ ]| = b$) et d'une différentielle d de degré 1 tel que $\big(\mathcal{A}[-a], \centerdot, d\big)$ est une algèbre commutative associative différentielle graduée et $\big(\mathcal{A}[-b], [\ ,\ ], d\big)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée. Le produit et le crochet vérifient une relation de compatibilité entre eux dite identité de Leibniz donnée par :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}, [\alpha, \beta\centerdot\gamma] = [\alpha, \beta]\centerdot\gamma + (-1)^{(|\beta|+a)(|\alpha|+b)}\beta\centerdot[\alpha, \gamma].$$

Dans le cas où $a = 0$ et $b = -1$, on retrouve les algèbres de Gerstenhaber et dans le cas où $a = b = 0$, on retrouve les algèbres de Poisson graduées.

Dans cet article, on reviendra dans la deuxième section à l'étude des structures d'algèbres de Gerstenhaber à homotopie près. Reprenant la structure d'une algèbre de Gerstenhaber, on donnera explicitement (sans utiliser les opérades) tous les choix de signes nécessaires pour les prolongements des opérations définies pour une algèbre de Gerstenhaber différentielle $\mathcal{G}$. On décrira la structure d'une G_∞ algèbre et plus particulièrement la G_∞ algèbre enveloppante de $\mathcal{G}$ donnée par :

$$\left(\mathcal{U}_G(\mathcal{G}) = S^+(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]), \Delta, \kappa, Q\right),$$

(voir [2], [14], [23]).

Dans la troisième section, on reviendra à l'étude des algèbres de Poisson graduées. Remarquons que la construction d'une algèbre à homotopie près suivie pour les algèbres de Gerstenhaber s'applique sans peine aux algèbres de Poisson graduées, on donnera la définition générale d'une algèbre de Poisson à homotopie près et particulièrement la P_∞ algèbre enveloppante d'une algèbre de Poisson $\mathcal{P}$:

$$\left(\mathcal{U}_P(\mathcal{P}) = S^+(\underline{\bigotimes}^+\mathcal{P}[1]), \Delta, \delta, Q\right),$$

(voir [8], [14], [11]).

Dans la quatrième section, on introduira la notion de (a, b)-algèbre qui englobe les notions de Poisson et de Gerstenhaber. On donnera une description explicite et complète de l'algèbre à homotopie près enveloppante d'une (a, b)-algèbre différentielle $(\mathcal{A}, \boldsymbol{.}, [\ ,\ ], d)$:

$$\left(\mathcal{U}_{(a,b)-alg}(\mathcal{A}) = S^+(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{A}[-a+1])[a-b]), \Delta, \delta'', Q\right).$$

On précise à chaque étape les signes apparaissant dans les prolongement des opérations $\boldsymbol{.}, d$ et $[\ ,\ ]$ à $\mathcal{U}_{(a,b)-alg}(\mathcal{A})$. On donnera, enfin, la définition générale d'une (a, b)-algèbre à homotopie près.

Dans la cinquième section, on précisera la relation entre les (a, b)-algèbres et les algèbres sur l'homologie de l'opérade des petits cubes en toute dimension. En fait, via le morphisme $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[-a]$, toute (a, b)-algèbre est isomorphe à une $(0, b-a)$-algèbre. Ces dernières correspondent aux $(n+1)$-algèbres qui sont des algèbres sur l'homologie de l'opérade des petits cubes de dimension $n+1$ (voir Corollaire 5.3.). Les $(n+1)$-algèbres sont assez bien connues et ont un regain d'interêt récent motivé par l'apparition d'exemples naturels en topologie (voir [20], [21], [6], [9]).

Dans la sixième section, on traitera quelques exemples de (a, b)-algèbres différentielles graduées en introduisant, en particulier, les super-crochets de Schouten et de Poisson pour un super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$.

2. Les algèbres de Gerstenhaber à homotopie près

2.1. Définitions

Soit $V = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$ un espace vectoriel gradué. On note par $V[k]$ l'espace V muni de la graduation $V[k]_i = V_{i+k}$.

Soit W un autre espace gradué. Une application linéaire f de degré k de V dans W sera notée $f : V \longrightarrow W[k]$.

Une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel gradué $\mathcal{G}$ muni d'une multiplication commutative et associative graduée $\boldsymbol{.} : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ de degré 0 et d'un crochet $[\ ,\ ] : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ de degré -1 tel que $(\mathcal{G}, \boldsymbol{.})$ est une algèbre commutative associative graduée et $(\mathcal{G}[1], [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie graduée et que, pour tout α homogène, l'application $[\alpha,\ .\ ]$ est une dérivation graduée pour la multiplication $\boldsymbol{.}$. En notant $|\alpha|$ le degré d'un élément homogène α de $\mathcal{G}$, on a donc :

(i) $\alpha\boldsymbol{.}\beta = (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta\boldsymbol{.}\alpha$,

(ii) $\alpha\boldsymbol{.}(\beta\boldsymbol{.}\gamma) = (\alpha\boldsymbol{.}\beta)\boldsymbol{.}\gamma$,

(iii) $[\alpha, \beta] = -(-1)^{(|\alpha|-1)(|\beta|-1)}[\beta, \alpha]$,

(iv) $(-1)^{(|\alpha|-1)(|\gamma|-1)}[[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{(|\beta|-1)(|\alpha|-1)}[[\beta, \gamma], \alpha] +$
$+ (-1)^{(|\gamma|-1)(|\beta|-1)}[[\gamma, \alpha], \beta] = 0$,

(v) $[\alpha, \beta\boldsymbol{.}\gamma] = [\alpha, \beta]\boldsymbol{.}\gamma + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)}\beta\boldsymbol{.}[\alpha, \gamma]$

et donc aussi :

$$[\alpha\boldsymbol{.}\beta, \gamma] = \alpha\boldsymbol{.}[\beta, \gamma] + (-1)^{|\beta|(|\gamma|-1)}[\alpha, \gamma]\boldsymbol{.}\beta.$$

Si de plus, on a une différentielle $d : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}[1]$ (ou $d : \mathcal{G}[1] \longrightarrow \mathcal{G}[2]$) de degré 1 telle que $d^2 = 0$, $d(\alpha\boldsymbol{.}\beta) = d\alpha\boldsymbol{.}\beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha\boldsymbol{.}d\beta$ et $d([\alpha, \beta]) = [d\alpha, \beta] + (-1)^{|\alpha|-1}[\alpha, d\beta]$, on dit que $(\mathcal{G}, \boldsymbol{.}, [\ ,\ ], d)$ est une algèbre de Gerstenhaber différentielle graduée. (Voir [14])

On précise ici que bien qu'on utilise une notation homologique pour le degré d'un espace gradué $\mathcal{G} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_i$, on suit une convention cohomologique au sens qu'une différentielle $d : \mathcal{G}_i \longrightarrow \mathcal{G}_{i+1}$ augmente le degré de 1.

Le degré sur $\mathcal{G}[1]$ sera noté dg, défini par : $dg(\alpha) = |\alpha| - 1$. Alors, le degré du crochet devient 0 et celui du produit vaut 1 ($dg([\ ,\ ]) = 0$, $dg(\boldsymbol{.}) = 1$).

Le produit **.** était commutatif et associatif pour $|\ |$ mais il ne l'est plus pour dg.

Pour chaque k, l'espace $\bigwedge^k(\mathcal{G}[1])$ est linéairement isomorphe à l'espace $S^k(\mathcal{G})[k]$. Cet isomorphisme n'est pas canonique. Nous choisissons ici l'isomorphisme défini dans [1] :

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \longmapsto (-1)^{\sum_{i=1}^k (k-i) dg(\alpha_i)} \alpha_1 \ldots \alpha_k.$$

On transforme donc le produit **.** en l'application μ sur $\mathcal{G}[1]$ défini par : $\mu(\alpha,\beta) = (-1)^{dg(\alpha)}\alpha\boldsymbol{.}\beta$. Le produit μ est anticommutatif et antiassociatif de degré 1 :

$$\mu(\alpha,\beta) = -(-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)}\mu(\beta,\alpha)$$
$$\mu\left(\mu(\alpha,\beta),\gamma\right) = -(-1)^{dg(\alpha)}\mu\left(\alpha,\mu(\beta,\gamma)\right)$$

et

$$d(\mu(\alpha,\beta)) = -\mu(d\alpha,\beta) + (-1)^{dg(\alpha)+1}\mu(\alpha,d\beta).$$

Le crochet $[\ ,\ ]$ est antisymétrique de degré 0 dans $\mathcal{G}[1]$ vérifiant Jacobi et Leibniz :

(i) $[\alpha,\beta] = -(-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)}[\beta,\alpha]$,

(ii) $(-1)^{dg(\alpha)dg(\gamma)}[[\alpha,\beta],\gamma] + (-1)^{dg(\beta)dg(\alpha)}[[\beta,\gamma],\alpha]$
$+ (-1)^{dg(\gamma)dg(\beta)}[[\gamma,\alpha],\beta] = 0$,

(iii) $[\alpha,\mu(\beta,\gamma)] = (-1)^{dg(\alpha)}\mu([\alpha,\beta],\gamma) + (-1)^{dg(\alpha)(dg(\beta)+1)}\mu(\beta,[\alpha,\gamma])$

ou encore

$$[\mu(\alpha,\beta),\gamma)] = \mu(\alpha,[\beta,\gamma]) + (-1)^{dg(\beta)dg(\gamma)}\mu([\alpha,\gamma],\beta).$$

De plus, on a

$$d([\alpha,\beta]) = [d\alpha,\beta] + (-1)^{dg(\alpha)}[\alpha,d\beta].$$

2.2. Produit battement

Soit V un espace vectoriel gradué. Notons ici le degré d'un vecteur homogène α_i de V par la même lettre α_i et $\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) = \varepsilon\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_{p+q}\\ \alpha_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\end{smallmatrix}\right)$ la signature de la permutation σ^{-1} en tenant compte des degrés, c'est à dire, la signature de la restriction de σ^{-1} aux indices des vecteurs de degré impair.

Soient p et q deux entiers ≥ 1, rappelons qu'un (p,q)-battement (ou un (p,q)-shuffle) est une permutation $\sigma \in S_{p+q}$ vérifiant :

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

On appelle $Bat(p,q) = \{\sigma \in S_{p+q} / \sigma \text{ est un } (p,q)\text{-battement}\}$ l'ensemble de tous les (p,q)-battements. Pour deux tenseurs $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$ et $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$, on définit le produit battement de α et β par :

$$\begin{aligned} bat_{p,q}(\alpha,\beta) &= \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\ &= \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon \left({\alpha_1,\dots,\alpha_{p+q} \atop \alpha_{\sigma^{-1}(1)},\dots,\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}} \right) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}. \end{aligned}$$

Ceci représente la somme signée de tous les tenseurs $\alpha_{i_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{i_n}$ dans lesquels les vecteurs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}$ apparaissent rangés dans leur ordre naturel. (Voir [15] et [19])

On note par $\underline{\bigotimes}^n(\mathcal{G}[1])$ l'espace quotient $\bigotimes^n(\mathcal{G}[1]) / \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 1}} Im(bat_{p,q})$ de $\bigotimes^n \mathcal{G}[1]$ par la somme de toutes les images des applications linéaires $bat_{p,q}$ telles que $p+q=n$.

On pose

$$\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1]) = \bigoplus_{n \geq 1} \left(\underline{\bigotimes}^n(\mathcal{G}[1]) \right).$$

L'espace $\mathcal{H}$ est engendré par les 'paquets' X qui sont les classes des tenseurs $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ dans le quotient. On notera ces classes par $X = \alpha_{[1,n]} = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$.

Leur degré est :

$$x = dg(X) = dg(\alpha_1) + \cdots + dg(\alpha_n).$$

Proposition 2.1. *(Voir* [19], [20]*)*

Le produit battement est associatif et commutatif, gradué de degré 0 : Pour tout $\alpha \in \bigotimes^p \mathcal{G}[1]$, $\beta \in \bigotimes^q \mathcal{G}[1]$, $\gamma \in \bigotimes^r \mathcal{G}[1]$,

$$\begin{aligned} &(i) \quad bat_{p,q}(\alpha,\beta) = (-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)} bat_{q,p}(\beta,\alpha), \\ &(ii) \quad bat_{p+q,r}(bat_{p,q}(\alpha,\beta),\gamma) = bat_{p,q+r}(\alpha, bat_{q,r}(\beta,\gamma)). \end{aligned}$$

2.3. Complexe de Gerstenhaber

La théorie des opérades dit que le dual d'une structure d'algèbre commutative est une structure de cogèbre de Lie. On considère, alors, la cogèbre de Lie $(\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1]), \delta)$ où δ est le cocrochet sur $\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])$ défini pour $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \in \mathcal{H}$ par

$$\begin{aligned}\delta(X) &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \bigotimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \\ &\qquad - \varepsilon\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_j & \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \\ \alpha_{j+1} \dots \alpha_n & \alpha_1 \dots \alpha_j \end{smallmatrix}\right) \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \bigotimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \\ &= \sum_{\substack{U \underline{\otimes} V = X \\ U, V \neq \emptyset}} U \bigotimes V - (-1)^{vu} V \bigotimes U.\end{aligned}$$

Le cocrochet δ est coantisymétrique de degré 0 et vérifie l'identité de coJacobi :
(i) $\tau \circ \delta = -\delta$,
(ii) $(id^{\otimes 3} + \tau_{12} \circ \tau_{23} + \tau_{23} \circ \tau_{12}) \circ (\delta \otimes id) \circ \delta = 0$,

où τ est la volte définie pour $X, Y \in \mathcal{H}$ par : $\tau(X \bigotimes Y) = (-1)^{xy} Y \bigotimes X$, $\tau_{12} = \tau \otimes id$ et $\tau_{23} = id \otimes \tau$.

Grâce à notre décalage, μ et d sont de même degré 1 dans $\mathcal{G}[1]$. On peut maintenant les réunir en une seule opération homogène sur $\mathcal{H}$.

On prolonge le produit μ et la différentielle d à $\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+ \mathcal{G}[1]$ comme des codérivations μ_1 et d_1 du cocrochet δ de degré 1 en posant :

$$d_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{\sum_{i<k} dg(\alpha_i)} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} d(\alpha_k) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k < n} (-1)^{\sum_{i<k} dg(\alpha_i)} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Alors, $(\mu_1 \otimes id + id \otimes \mu_1) \circ \delta = \delta \circ \mu_1$, $\mu_1^2 = 0$, $(d_1 \otimes id + id \otimes d_1) \circ \delta = \delta \circ d_1$ et $d_1^2 = 0$.

Rappelons qu'une codérivation D de la cogèbre $(\mathcal{H},\delta)$ est entièrement déterminée par une suite d'applications $D_r : \underline{\bigotimes}^r\mathcal{G}[1] \longrightarrow \mathcal{G}[2]$. Plus précisément, on a :

$$D(\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n) =$$

$$\sum_{\substack{1\leq r\leq n\\ 0\leq j\leq n-r}}(-1)^{\sum_{i\leq j} dg(\alpha_i)}\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_j\underline{\otimes}D_r(\alpha_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{j+r})\underline{\otimes}\alpha_{j+r+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n.$$

Si on pose $D_1 = d$, $D_2 = \mu$, $D_k = 0$, pour $k \geq 3$, alors, $D = d_1 + \mu_1$ est l'unique codérivation de δ de degré 1 qui prolonge d et μ à $\mathcal{H}$. Elle vérifie

$$D\circ D = 0 \text{ et } (D\otimes id + id\otimes D)\circ\delta = \delta\circ D.$$

Rappelons aussi qu'une structure d'algèbre commutative à homotopie près, aussi appelée C_∞ algèbre, sur $\mathcal{G}$ est la donnée d'une codifférentielle sur la cogèbre de Lie $(\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1]),\delta)$ (voir [2], [7]). On a donc obtenu que $\left(\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1]),\delta, D = d_1 + \mu_1\right)$ est une C_∞ algèbre.

Etudions maintenant le crochet $[\ ,\ ]$ défini sur $\mathcal{G}[1]$. D'abord, on le prolonge à $\mathcal{H}$ comme l'unique crochet de degré 0 compatible avec le cocrochet δ vérifiant :

$$\delta\circ[\ ,\ ] = ([\ ,\ ]\otimes id)\circ\big(\tau_{23}\circ(\delta\otimes id)+id\otimes\delta\big)+(id\otimes[\ ,\ ])\circ\big(\delta\otimes id+\tau_{12}\circ(id\otimes\delta)\big).$$

Pour $X = \alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{p+q}$, ce prolongement est donné par :

$$[X,Y] = \sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k,\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Ce crochet est bien défini sur $\mathcal{H}$. On a

Proposition 2.2.

L'espace $\mathcal{H}$, muni du crochet $[\ ,\ ]$ et de l'opérateur D est une algèbre de Lie différentielle graduée : Pour tout X, Y et Z de $\mathcal{H}$, on a :

(i) $[X,Y] = -(-1)^{xy}[Y,X]$,

(ii) $(-1)^{xz}\,[[X,Y],Z] + (-1)^{yx}\,[[Y,Z],X] + (-1)^{zy}\,[[Z,X],Y] = 0$,

(iii) $D\left([X,Y]\right) = [D(X),Y] + (-1)^x\,[X,D(Y)]$.

L'espace $\mathcal{H}$ est maintenant muni d'une opération D à un argument de degré 1 et d'un crochet $[\ ,\ ]$ à deux arguments de degré 0.

La théorie des opérades dit aussi que le dual d'une structure d'algèbre de Lie est une structure de cogèbre cocommutative coassociative. $(\mathcal{H}, [\ ,\ ], D)$ étant une algèbre de Lie différentielle graduée, on procède à un décalage de degré en considérant l'espace $\mathcal{H}[1]$ et le degré $dg'(X) = dg(X) - 1 = x'$. En fait, on a dit plus haut que l'algèbre $\bigwedge(\mathcal{H})$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à l'algèbre $S\left(\mathcal{H}[1]\right)$. Il n'y a pas d'isomorphisme d'algèbre entre ces deux espaces, il n'y a pas non plus d'isomorphisme linéaire canonique. On choisit l'isomorphisme donné dans [1] :

$$X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_n} \longrightarrow (-1)^{\sum_{k=1}^{n}(n-k)x_{i_k}} X_{i_1} \bullet \ldots \bullet X_{i_n}.$$

Par exemple, on posera ici $\ell_2(X, Y) = (-1)^x [X, Y]$. Alors, ℓ_2 devient dg'-symétrique de degré 1 sur $\mathcal{H}[1]$.

Posons $S^+(\mathcal{H}[1]) = \bigoplus_{n\geq 1} S^n(\mathcal{H}[1])$, on construit la cogèbre cocommutative coassociative $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta)$, où Δ est le coproduit défini par : $\forall X_1 \ldots X_n \in S^n(\mathcal{H}[1])$,

$$\Delta(X_1 \ldots X_n) = \sum_{\substack{I\cup J=\{1,\ldots,n\}\\ \#I,\#J>0}} \varepsilon\begin{pmatrix} x'_1 \ldots x'_n \\ x'_I x'_J \end{pmatrix} X_I \bigotimes X_J.$$

On a noté par X_I le produit $X_{i_1} \ldots X_{i_r}$ si $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$, par X_J le produit $X_{j_1} \ldots X_{j_{n-r}}$ si $J = \{j_1 < \cdots < j_{n-r}\}$ et par x'_i le degré $dg'(X_i)$.

Le coproduit Δ est cocommutatif et coassociatif :

$$\tau' \circ \Delta = \Delta \text{ et } (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta,$$

où τ' est la volte dans $S^+(\mathcal{H}[1])$.

Le crochet $[\ ,\ ]$ était antisymétrique sur $\mathcal{H}$ de degré 0, il devient sur $\mathcal{H}[1]$ un crochet $\ell_2(X, Y) = (-1)^x [X, Y]$ symétrique, de degré 1 et vérifie l'identité de Jacobi graduée. De plus, D est une différentielle graduée de ℓ_2 qui est aussi de degré 1. On a donc :

(i) $\ell_2(X, Y) = (-1)^{x'y'} \ell_2(Y, X)$,

$$(ii)\ (-1)^{x'z'} \ell_2\left(\ell_2(X, Y), Z\right) + (-1)^{y'x'} \ell_2\left(\ell_2(Y, Z), X\right) + (-1)^{z'y'} \ell_2\left(\ell_2(Z, X), Y\right) = 0,$$

$$(iii)\ D\left(\ell_2(X, Y)\right) = -\ell_2\left(D(X), Y\right) + (-1)^{x'+1} \ell_2\left(X, D(Y)\right).$$

On peut maintenant réunir ℓ_2 et D en une seule opération Q sur $S^+(\mathcal{H}[1])$.

On prolonge ℓ_2 à $S^+(\mathcal{H}[1])$ comme une codérivation ℓ de Δ de degré 1 :

$$\ell(X_1\dots X_n)=\sum_{i<j}\varepsilon\begin{pmatrix}x'_1\dots x'_n\\ x'_ix'_jx'_1\dots\widehat{ij}\dots x'_n\end{pmatrix}\ell_2(X_i,X_j).X_1\dots\widehat{ij}\dots X_n.$$

On prolonge aussi D à $S^+(\mathcal{H}[1])$ comme une codérivation m de Δ toujours de degré 1 :

$$m(X_1\dots X_n)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\begin{pmatrix}x'_1\dots x'_n\\ x'_ix'_1\dots\widehat{i}\dots x'_n\end{pmatrix}D(X_i).X_1\dots\widehat{i}\dots X_n.$$

En posant $Q_1=D$, $Q_2=\ell_2$, $Q_k=0$, si $k\geq 3$ et

$$Q(X_1\dots X_n)=\sum_{\substack{I\cup J=\{1,\dots,n\}\\ I\neq\emptyset}}\varepsilon\begin{pmatrix}x'_1\dots x'_n\\ x'_Ix'_J\end{pmatrix}Q_{\#I}(X_I).X_J.$$

Alors, $Q=m+\ell$ est l'unique codérivation de Δ, de degré 1, prolongeant D et ℓ_2 à $S^+(\mathcal{H}[1])$. Elle vérifie

$$Q^2=0 \text{ et } (Q\otimes id+id\otimes Q)\circ\Delta=\Delta\circ Q.$$

Rappelons qu'une structure d'algèbre de Lie à homotopie près, aussi appelée L_∞ algèbre, sur $\mathcal{H}$ est la donnée d'une codifférentielle sur la cogèbre cocommutative et coassociative $\left(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta\right)$ (voir [2], [3]). On a donc obtenu que $\left(S^+(\mathcal{H}[1]),\Delta,Q=\ell+m\right)$ est une L_∞ algèbre.

D'autre part, $(\mathcal{H},\delta,D)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle, on définit un cocrochet κ sur $\mathcal{H}[1]$ par :

$$\kappa(X)=\sum_{\substack{U\underline{\otimes}V=X\\ U,V\neq\emptyset}}(-1)^{u'}\left(U\bigotimes V+(-1)^{v'u'}V\bigotimes U\right),\qquad\forall X\in\mathcal{H}[1].$$

Puis κ se prolonge à $S^+(\mathcal{H}[1])$ par :

$$\kappa(X_1\dots X_n)=\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\begin{pmatrix}x'_1\dots x'_n\\ x'_Ix'_sx'_J\end{pmatrix}\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{x'_I+u'_s}\times$$
$$\times\left(X_I.U_s\bigotimes V_s.X_J+(-1)^{v'_su'_s}X_I.V_s\bigotimes U_s.X_J\right).$$

Alors, κ est un cocrochet cosymétrique sur $S^+(\mathcal{H}[1])$ de degré 1 vérifiant l'identité de coJacobi :

$$\tau'\circ\kappa=\kappa \text{ et } \left(id^{\otimes 3}+\tau'_{12}\circ\tau'_{23}+\tau'_{23}\circ\tau'_{12}\right)\circ(\kappa\otimes id)\circ\kappa=0.$$

De plus, $Q = \ell + m$ est une codérivation de $S^+(\mathcal{H}[1])$ pour κ de degré 1.

Alors, $\big(S^+(\mathcal{H}[1]), \kappa, Q\big)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle graduée, donc, c'est encore une C_∞ algèbre.

Le cocrochet κ et le coproduit Δ vérifient, enfin, l'identité de coLeibniz :

$$(id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau'_{12} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta.$$

On dit que $\big(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta, \kappa, Q\big)$ est une cogèbre de Gerstenhaber codifférentielle graduée.

Définition 2.3. Une G_∞ algèbre (V, Δ, κ, Q) est une bicogèbre codifférentielle colibre telle que $V \cong S^+(\mathcal{H}[1])$ et Q est une codérivation pour le coproduit cocommutatif et coassociatif Δ et le cocrochet de Lie κ définis précédemment, de degré 1 et de carré nul.

La G_∞ algèbre $\Big(\mathcal{U}_G(\mathcal{G}) = S^+(\underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]), \Delta, \kappa, Q = \ell + m\Big)$ est appelée la G_∞ algèbre enveloppante de l'algèbre de Gerstenhaber $\mathcal{G}$.

(Voir [2], [7], [22], [23]).

3. Les algèbres de Poisson à homotopie près

3.1. Définition

Une algèbre de Poisson graduée est un espace vectoriel gradué $\mathcal{P}$ muni d'un produit commutatif et associatif gradué $\cdot : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de degré 0 et d'un crochet $\{\ ,\ \} : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de degré 0 tel que $(\mathcal{P}, \cdot)$ est une algèbre commutative graduée, $(\mathcal{P}, \{\ ,\ \})$ est une algèbre de Lie graduée et que, pour tout α homogène, l'application $\{\alpha,\ .\ \}$ soit une dérivation graduée pour le produit $\cdot$.

En notant $|\alpha|$ le degré d'un élément homogène α de $\mathcal{P}$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \beta &= (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \cdot \alpha,\\
\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,\\
\{\alpha, \beta\} &= -(-1)^{|\alpha||\beta|} \{\beta, \alpha\},\\
(-1)^{|\alpha||\gamma|}\{\{\alpha,\beta\},\gamma\} + (-1)^{|\beta||\alpha|}\{\{\beta,\gamma\},\alpha\} &+ (-1)^{|\gamma||\beta|}\{\{\gamma,\alpha\},\beta\} = 0,\\
\{\alpha, \beta \cdot \gamma\} &= \{\alpha,\beta\} \cdot \gamma + (-1)^{|\beta||\alpha|} \beta \cdot \{\alpha, \gamma\}
\end{aligned}$$

et donc aussi :

$$\{\alpha.\beta,\gamma\} = \alpha.\{\beta,\gamma\} + (-1)^{|\beta||\gamma|}\{\alpha,\gamma\}.\beta.$$

Si de plus, on a une différentielle $d : \mathcal{P} \to \mathcal{P}[1]$ de degré 1 telle que $d^2 = 0$, $d(\alpha.\beta) = d\alpha.\beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha.d\beta$ et $d(\{\alpha,\beta\}) = \{d\alpha,\beta\} + (-1)^{|\alpha|}\{\alpha,d\beta\}$ on dit que $(\mathcal{P}, ., \{\ ,\ \}, d)$ est une algèbre de Poisson différentielle graduée (voir [11]).

Pour construire la structure de l'algèbre de Poisson à homotopie près, on va reprendre la construction précédente dans le cas des algèbres de Poisson différentielles graduées.

On considère, donc, l'espace $\mathcal{P}[1]$ et la graduation $dg(\alpha) = |\alpha| - 1$. On transforme le produit $.$ en μ en posant $\mu(\alpha,\beta) = (-1)^{dg(\alpha)}\alpha.\beta$ et le crochet $\{\ ,\ \}$ en $[\ ,\ ]$ en posant $[\alpha,\beta] = (-1)^{dg(\alpha)}\{\alpha,\beta\}$.

Le produit μ devient anticommutatif, antiassociatif de degré 1 et le crochet $[\ ,\ ]$ devient symétrique de degré 1, vérifiant l'identité de Jacobi graduée et celle de Leibniz avec μ :

$$\begin{aligned}
&dg(\mu) = dg([\ ,\ ]) = dg(d) = 1,\\
&\mu(\alpha,\beta) = -(-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)}\mu(\beta,\alpha),\\
&\mu\left(\mu(\alpha,\beta),\gamma\right) = -(-1)^{dg(\alpha)}\mu\left(\alpha,\mu(\beta,\gamma)\right),\\
&[\alpha,\beta] = -(-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)}[\beta,\alpha],\\
&(-1)^{dg(\alpha)dg(\gamma)}[[\alpha,\beta],\gamma] + (-1)^{dg(\beta)dg(\alpha)}[[\beta,\gamma],\alpha]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (-1)^{dg(\gamma)dg(\beta)}[[\gamma,\alpha],\beta] = 0,\\
&[\alpha,\mu(\beta,\gamma)] = (-1)^{dg(\alpha)+1}\mu([\alpha,\beta],\gamma) + (-1)^{(dg(\alpha)+1)(dg(\beta)+1)}\mu(\beta,[\alpha,\gamma]),
\end{aligned}$$

ou encore

$$[\mu(\alpha,\beta),\gamma)] = (-1)^{dg(\alpha)+1}\mu(\alpha,[\beta,\gamma]) + (-1)^{dg(\beta)dg(\gamma)+1}\mu([\alpha,\gamma],\beta).$$

De plus, on a

$$d(\mu(\alpha,\beta)) = -\mu(d\alpha,\beta) + (-1)^{dg(\alpha)+1}\mu(\alpha,d\beta) \text{ et}$$

$$d([\alpha,\beta]) = -[d\alpha,\beta] + (-1)^{dg(\alpha)+1}[\alpha,d\beta].$$

3.2. Complexe de Poisson

Comme dans le cas d'une algèbre de Gerstenhaber, on réunit d'abord μ et d : On considère l'espace $\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{P}[1]) = \bigoplus_{n\geq 1}\left(\underline{\bigotimes}^n(\mathcal{P}[1])\right)$ avec le degré

$$dg(X) = x = dg(\alpha_1) + \cdots + dg(\alpha_n),\ \text{pour } X = \alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n \in \mathcal{H}.$$

On munit cet espace du cocrochet δ défini par

$$\delta(X) = \sum_{\substack{U\underline{\otimes}V=X\\ U,V\neq\emptyset}} U\bigotimes V - (-1)^{vu}V\bigotimes U.$$

Alors, le complexe $(\mathcal{H},\delta)$ est une cogèbre de Lie.

On prolonge d et μ à $\mathcal{H}$ comme des codérivations d_1 et μ_1 du cocrochet δ de degré 1 en posant :

$$d_1(\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n) = \sum_{1\leq k\leq n}(-1)^{\sum_{i<k}dg(\alpha_i)}\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}d(\alpha_k)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n) = \sum_{1\leq k<n}(-1)^{\sum_{i<k}dg(\alpha_i)}\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu(\alpha_k,\alpha_{k+1})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n.$$

Alors,

$(\mu_1\otimes id+id\otimes\mu_1)\circ\delta = \delta\circ\mu_1, \mu_1^2 = 0, (d_1\otimes id+id\otimes d_1)\circ\delta = \delta\circ d_1$ et $d_1^2 = 0$.

Or, on sait qu'une codérivation D de la cogèbre $(\mathcal{H},\delta)$ est entièrement déterminée par une suite d'application $D_r : \underline{\bigotimes}^r\mathcal{P}[1] \longrightarrow \mathcal{P}[2]$. Plus précisément, on a :

$$D(\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n) = \sum_{\substack{1\leq r\leq n\\ 0\leq j\leq n-r}}(-1)^{\sum_{i\leq j}dg(\alpha_i)}\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_j\underline{\otimes}D_r(\alpha_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{j+r})\underline{\otimes}\alpha_{j+r+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n.$$

Si on pose $D_1 = d$, $D_2 = \mu$, $D_k = 0$, pour $k \geq 3$, alors, $D = d_1 + \mu_1$ est l'unique codérivation de δ de degré 1 qui prolonge d et μ à $\mathcal{H}$. Elle vérifie

$$D\circ D = 0 \text{ et } (D\otimes id + id\otimes D)\circ\delta = \delta\circ D.$$

Alors, $(\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{P}[1]),\delta, D = d_1 + \mu_1)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle, donc, c'est une C_∞ algèbre.

Bien qu'il ne soit pas antisymétrique, on prolonge le crochet $[\ ,\ ]$ défini sur $\mathcal{P}[1]$ à $\mathcal{H}$ comme l'unique "crochet" de degré 1 compatible avec le cocrochet δ, c'est à dire, vérifiant :

$$\delta\circ[\ ,\ ]=([\ ,\ ]\otimes id)\circ\big(\tau_{23}\circ(\delta\otimes id)+id\otimes\delta\big)+(id\otimes[\ ,\ ])\circ\big(\delta\otimes id+\tau_{12}\circ(id\otimes\delta)\big).$$

Ce prolongement est donné pour $X=\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p$ et $Y=\alpha_{p+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{p+q}$ par :

$$[X,Y]=\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k,\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{\sum_{i<k}dg(\alpha_{\sigma^{-1}(i)})}\times$$
$$\times\ \alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}[\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Puisque $[\ ,\ ]$ n'était pas antisymétrique sur $\mathcal{P}[1]$, son prolongement ne l'est pas non plus sur $\mathcal{H}$. On se ramène à un vrai crochet de degré 0 en décalant $\mathcal{H}$ par -1.

On considère l'espace $\mathcal{H}[-1]$ muni de la graduation $dg'(X)=x'=dg(X)+1$, pour $X\in\mathcal{H}[-1]$. On construit sur $\mathcal{H}[-1]$ le crochet $\{X,Y\}=(-1)^{-x'}[X,Y]$. Alors, on a

Proposition 3.1.
L'espace $\mathcal{H}[-1]$ muni du crochet $\{\ ,\ \}$ et de l'opérateur D est une algèbre de Lie différentielle graduée. Pour tout X, Y et Z de $\mathcal{H}[-1]$, on a :

i) $\{X,Y\}=-(-1)^{x'y'}\{Y,X\}$,

ii) $(-1)^{x'z'}\{\{X,Y\},Z\}+(-1)^{y'x'}\{\{Y,Z\},X\}+(-1)^{z'y'}\{\{Z,X\},Y\}=0$,

iii) $D\left(\{X,Y\}\right)=\{D(X),Y\}+(-1)^{x'}\{X,D(Y)\}$.

Maintenant, $\big(\mathcal{H}[-1],\{\ ,\ \},D\big)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée. On peut donc lui associer une cogèbre cocommutative coassociative $(S^+(\mathcal{H}[-1][1]),\Delta)$ avec une codérivation Q construite à partir de $\{\ ,\ \}$ et D. Mais ici $\mathcal{H}[-1][1]=\mathcal{H}$ et on préfère réutiliser le crochet $[\ ,\ ]$ sur $\mathcal{H}$ défini plus haut plutôt que $(-1)^x\{X,Y\}=-[X,Y]$.

On prolonge donc D et $[\ ,\ ]$ à $S^+(\mathcal{H})$ comme des codérivations m et ℓ de Δ de degré 1 et de carré nul en posant :

$$m(X_1\dots X_n)=\sum_{i=1}^n\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x_1\dots x_n\\ x_ix_1\dots\widehat{i}\dots x_n\end{smallmatrix}\right)D(X_i).X_1\dots\widehat{i}\dots X_n$$

et

$$\ell(X_1 \dots X_n) = \sum_{i<j} \varepsilon \left({}^{x_1 \dots x_n}_{x_i x_j x_1 \dots \widehat{ij} \dots x_n} \right) [X_i, X_j].X_1 \dots \widehat{ij} \dots X_n.$$

Puis, on pose $Q_1 = D$, $Q_2 = \ell_2$, $Q_k = 0$, si $k \geq 3$ et

$$Q(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1,\dots,n\} \\ I \neq \emptyset}} \varepsilon \left({}^{x_1 \dots x_n}_{x_I x_J} \right) Q_{\# I}(X_I).X_J.$$

Alors, $Q = m + \ell$ est l'unique codérivation de Δ, de degré 1, prolongeant D et $[\ ,\ ]$ à $S^+(\mathcal{H})$. Elle vérifie

$$Q^2 = 0 \text{ et } (Q \otimes id + id \otimes Q) \circ \Delta = \Delta \circ Q.$$

Donc, $\big(S^+(\mathcal{H}), \Delta, Q\big)$ est une L_∞ algèbre.

D'autre part, $(\mathcal{H}, \delta, D)$ étant une C_∞ algèbre, on prolonge le cocrochet δ à $S^+(\mathcal{H})$ par :

$$\delta(X_1 \dots X_n) =$$
$$\sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1,\dots,n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left({}^{x_1 \dots x_n}_{x_I x_s x_J} \right) \sum_{\substack{U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \Big(X_I.U_s \bigotimes V_s.X_J - (-1)^{v_s u_s} X_I.V_s \bigotimes U_s.X_J \Big).$$

Alors, δ est un cocrochet coantisymétrique sur $S^+(\mathcal{H})$ de degré 0 vérifiant l'identité de coJacobi graduée. De plus, $Q = \ell + m$ est une codérivation de $S^+(\mathcal{H})$ pour δ. Donc, $\big(S^+(\mathcal{H}), \delta, Q\big)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle graduée, c'est à dire, c'est encore une C_∞ algèbre.

De plus, le cocrochet δ et le coproduit Δ vérifient l'identité de coLeibniz :

$$(id \otimes \Delta) \circ \delta = (\delta \otimes id) \circ \Delta + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta) \circ \Delta.$$

On dit que $\big(S^+(\mathcal{H}), \Delta, \delta, Q\big)$ est une cogèbre de Poisson codifférentielle graduée.

Définition 3.2. Une P_∞ algèbre (V, Δ, δ, Q) est une bicogèbre codifférentielle colibre telle que $V \cong S^+(\mathcal{H})$ et Q est une codérivation pour le coproduit cocommutatif et coassociatif Δ et le cocrochet de Lie δ définis précédemment, de degré 1 et de carré nul.

- La P_∞ algèbre $\Big(\mathcal{U}_P(\mathcal{P}) = S^+(\underline{\bigotimes}^+ \mathcal{P}[1]), \Delta, \delta, Q = \ell + m\Big)$ est appelée la P_∞ algèbre enveloppante de l'algèbre de Poisson $\mathcal{P}$.

(Voir [11], [14], [8]).

4. Les (a, b)-algèbres à homotopie près

4.1. Définition

Considérons un espace vectoriel $\mathcal{A}$ gradué. Le degré d'un élément homogène α de $\mathcal{A}$ est noté $|\alpha|$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, l'espace $\mathcal{A}$ est muni d'un produit $\boldsymbol{.}$ de degré a ($|\boldsymbol{.}| = a$) et d'un crochet $[\ ,\ ]$ de degré b ($|[\ ,\ ]| = b$) tel que $\Big(\mathcal{A}[-a], \boldsymbol{.}\Big)$ est une algèbre commutative et associative graduée et $\Big(\mathcal{A}[-b], [\ ,\ ]\Big)$ est une algèbre de Lie graduée. De plus, l'application linéaire $ad : \mathcal{A}[-b] \longrightarrow \mathcal{D}er\Big(\mathcal{A}[-a], \boldsymbol{.}\Big)$; $\alpha \longmapsto ad_\alpha$ est telle que ad_α soit une dérivation graduée pour le produit $\boldsymbol{.}$.

On dit que $\Big(\mathcal{A}, \boldsymbol{.}, [\ ,\ ]\Big)$ est une (a, b)-algèbre graduée. Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$, on a les propriétés suivantes :

(i) $\alpha\boldsymbol{.}\beta = (-1)^{(|\alpha|+a)(|\beta|+a)}\beta\boldsymbol{.}\alpha$,

(ii) $\alpha\boldsymbol{.}(\beta\boldsymbol{.}\gamma) = (\alpha\boldsymbol{.}\beta)\boldsymbol{.}\gamma$,

(iii) $[\alpha, \beta] = -(-1)^{(|\alpha|+b)(|\beta|+b)}[\beta, \alpha]$,

(iv) $(-1)^{(|\alpha|+b)(|\gamma|+b)}[[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{(|\beta|+b)(|\alpha|+b)}[[\beta, \gamma], \alpha]$
$+(-1)^{(|\gamma|+b)(|\beta|+b)}[[\gamma, \alpha], \beta] = 0,$

(v) $[\alpha, \beta\boldsymbol{.}\gamma] = [\alpha, \beta]\boldsymbol{.}\gamma + (-1)^{(|\beta|+a)(|\alpha|+b)}\beta\boldsymbol{.}[\alpha, \gamma]$

qui s'écrit encore $[\alpha\boldsymbol{.}\beta, \gamma] = \alpha\boldsymbol{.}[\beta, \gamma] + (-1)^{(|\beta|+a)(|\gamma|+b)}[\alpha, \gamma]\boldsymbol{.}\beta$.
De plus, si on a une différentielle $d : \mathcal{A}[-a] \longrightarrow \mathcal{A}[-a+1]$ $\Big($ou $d : \mathcal{A}[-b] \longrightarrow \mathcal{A}[-b+1]\Big)$ de degré 1 vérifiant $d \circ d = 0$,

$$d(\alpha\boldsymbol{.}\beta) = d\alpha\boldsymbol{.}\beta + (-1)^{|\alpha|+a}\alpha\boldsymbol{.}d\beta \text{ et } d([\alpha, \beta]) = [d\alpha, \beta] + (-1)^{|\alpha|+b}[\alpha, d\beta],$$

on dira que $\Big(\mathcal{A}, \boldsymbol{.}, [\ ,\ ], d\Big)$ est une (a, b)-algèbre différentielle graduée.

Comme ci-dessus, on utilise un décalage pour homogènéiser le produit et la différentielle. On considère l'espace $\mathcal{A}[-a+1]$ muni de la graduation $dg(\alpha) = |\alpha| + a - 1$ que l'on note simplement par α. Sur $\mathcal{A}[-a+1]$, le produit $\boldsymbol{.}$ n'est plus commutatif et le crochet $[\ ,\ ]$ n'est plus antisymétrique.

On construit, donc, un nouveau produit μ sur $\mathcal{A}[-a+1] = \mathcal{A}[-a][1]$ de degré 1 défini par

$$\mu(\alpha,\beta) = (-1)^{1.\alpha}\alpha.\beta$$

et un nouveau crochet ℓ sur $\mathcal{A}[-a+1] = \mathcal{A}[-b][b-a+1]$ de degré $b-a+1$ défini par

$$\ell(\alpha,\beta) = (-1)^{(b-a+1).\alpha}[\alpha,\beta].$$

Et on a

(i) $\mu(\alpha,\beta) = -(-1)^{\alpha\beta}\mu(\beta,\alpha)$,

(ii) $\mu\left(\mu(\alpha,\beta),\gamma\right) = -(-1)^{\alpha}\mu\left(\alpha,\mu(\beta,\gamma)\right)$,

(iii) $\ell(\alpha,\beta) = -(-1)^{b-a+1}(-1)^{\alpha\beta}\ell(\beta,\alpha)$,

(iv) $(-1)^{\alpha\gamma}\ell(\ell(\alpha,\beta),\gamma) + (-1)^{\beta\alpha}\ell(\ell(\beta,\gamma),\alpha) + (-1)^{\gamma\beta}\ell(\ell(\gamma,\alpha),\beta) = 0$,

(v) $\ell(\alpha,\mu(\beta,\gamma)) = (-1)^{\alpha+b-a+1}\mu(\ell(\alpha,\beta),\gamma)$
$\qquad + (-1)^{(\alpha+b-a+1)(\beta+1)}\mu(\beta,\ell(\alpha,\gamma))$,

ou encore

$$\ell(\alpha,\mu(\beta,\gamma)) = (-1)^{(b-a+1)(\alpha+1)}\mu(\alpha,\ell(\beta,\gamma)) + (-1)^{b-a+1+\beta\gamma}\mu(\ell(\alpha,\gamma),\beta).$$

De plus, d reste encore une dérivation pour μ et ℓ, elle vérifie :

$$\begin{aligned} d(\mu(\alpha,\beta)) &= -\mu(d\alpha,\beta) + (-1)^{\alpha+1}\mu(\alpha,d\beta) \\ \text{et } d(\ell(\alpha,\beta)) &= (-1)^{b-a+1}\ell(d\alpha,\beta) + (-1)^{\alpha+b-a+1}\ell(\alpha,d\beta). \end{aligned}$$

4.2. Extension de la multiplication et du crochet à la cogèbre de Lie codifférentielle

On considère comme précédemment l'espace

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\geq 1}\big(\underline{\bigotimes}^n\mathcal{A}[-a+1]\big) = \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{A}[-a+1])$$

et pour $X = \alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n \in \mathcal{H}$, le degré $dg(X) = \alpha_1+\dots+\alpha_n$ noté simplement par x. Sur cet espace, on définit un cocrochet δ de degré 0 par :

$$\delta(X) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \bigotimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$$
$$- \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_j & \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \\ \alpha_{j+1} \dots \alpha_n & \alpha_1 \dots \alpha_j \end{smallmatrix} \right) \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \bigotimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j$$
$$= \sum_{\substack{U \underline{\otimes} V = X \\ U, V \neq \emptyset}} U \bigotimes V - (-1)^{vu} V \bigotimes U.$$

On prolonge μ et d à $\mathcal{H}$ comme des codérivations μ_1 et d_1 de δ de degré 1 en posant :

$$d_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{\sum_{i<k} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} d(\alpha_k) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k < n} (-1)^{\sum_{i<k} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Alors,

$(\mu_1 \otimes id + id \otimes \mu_1) \circ \delta = \delta \circ \mu_1, \mu_1^2 = 0, (d_1 \otimes id + id \otimes d_1) \circ \delta = \delta \circ d_1$ et $d_1^2 = 0$.

(Voir [2])

En posant $D_1 = d$, $D_2 = \mu$, $D_k = 0$, si $k \geq 3$ et

$D(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) =$

$$\sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 0 \leq j \leq n-r}} (-1)^{\sum_{i \leq j} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \underline{\otimes} D_r(\alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{j+r}) \underline{\otimes} \alpha_{j+r+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Alors, $D = d_1 + \mu_1$ est l'unique codérivation de δ de degré 1 qui prolonge d et μ à $\mathcal{H}$.

Elle vérifie

$$D \circ D = 0 \text{ et } (D \otimes id + id \otimes D) \circ \delta = \delta \circ D.$$

On obtient que $(\mathcal{H}, \delta, D)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle, donc, c'est une C_∞ algèbre

On prolonge, ensuite, le crochet ℓ à $\mathcal{H}$.

Proposition 4.1. *Sur $\mathcal{H}$, il existe un unique "crochet" ℓ_2, de degré $b-a+1$, vérifiant :*

$$\delta\circ\ell_2=(\ell_2\otimes id)\circ\big(\tau_{23}\circ(\delta\otimes id)+id\otimes\delta\big)+(id\otimes\ell_2)\circ\big(\delta\otimes id+\tau_{12}\circ(id\otimes\delta)\big)\ :\ (4.1)$$

Ce crochet est défini pour $X=\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p$ et $Y=\alpha_{p+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{p+q}$ par :

$$\ell_2(X,Y)=\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k,\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}}\times$$
$$\times\,\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Démonstration. Le prolongement ℓ_2 défini ci-dessus vérifie bien (4.1), en effet : $\delta\circ\ell_2(X,Y)=$

$$\delta\Big(\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k,\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}}\times$$
$$\times\,\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\Big)$$

$$=\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ 1\leq j<k\leq p+q-1\\ \sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}}\ \times$$
$$\times\Big(\alpha_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(j)]}\bigotimes\alpha_{\sigma^{-1}(j+1)}\underline{\otimes}\dots\ell\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$
$$-\,\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(j)]},\ \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)}\dots\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\dots\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\\ \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)}\dots\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\dots\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)},\ \alpha_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(j)]}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\,\alpha_{\sigma^{-1}(j+1)}\underline{\otimes}\dots\ell\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}\bigotimes\alpha_{[\sigma^{-1}(1),\sigma^{-1}(j)]}\Big)$$

$$+\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ 1\leq k<j\leq p+q-1\\ \sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}}\ \times$$
$$\times\,\Big(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\ell\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(j)}\bigotimes\alpha_{[\sigma^{-1}(j+1),\sigma^{-1}(p+q)]}$$
$$-\,\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\dots\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\dots\alpha_{\sigma^{-1}(j)},\ \alpha_{[\sigma^{-1}(j+1),\sigma^{-1}(p+q)]}\\ \alpha_{[\sigma^{-1}(j+1),\sigma^{-1}(p+q)]},\ \alpha_{\sigma^{-1}(1)}\dots\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\dots\alpha_{\sigma^{-1}(j)}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\,\alpha_{[\sigma^{-1}(j+1),\sigma^{-1}(p+q)]}\bigotimes\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\ell\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(j)}\Big)$$

$=$ (I)+(II)+(III)+(IV).

Dans (I), on fixe j et σ et on pose

$$I=\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(j)\},\ I_1=I\cap\{1,\dots,p\}=\{i_1,\dots,i_r\}$$
$$\text{et } I_2=I\cap\{p+1,\dots,p+q\}=\{i_{r+1},\dots,i_j\}.$$

Si $I\not\subset\{1,\dots,p\}$ ou $I\not\subset\{p+1,\dots,p+q\}$, on fixe $k>j$ tel que $\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)$ et on fixe $(\sigma^{-1}(j+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q))=(i_{j+1},\dots,i_{p+q})$.
Alors, l'ensemble

$$\{\sigma\in Bat(p,q)/(\sigma^{-1}(j+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q))=(i_{j+1},\dots,i_{p+q})$$
$$\text{et } \sigma^{-1}(\{1,\dots,j\})=I\}$$

est en bijection avec l'ensemble

$$\{\rho\in Bat(r,j-r)\text{ défini sur } I=I_1\cup I_2\}\,.$$

Et on a, $\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})=\varepsilon_\alpha(\rho^{-1})$. Dans ce cas, les termes de (I) sont de la forme

$$bat_{r,j-r}(\alpha_{i_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{i_r},\alpha_{i_{r+1}}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{i_j})\bigotimes\alpha_{i_{j+1}}\underline{\otimes}\dots\ell(\alpha_{i_k},\alpha_{i_{k+1}})\dots\underline{\otimes}\alpha_{i_{p+q}}.$$

Ils sont nuls dans $\underline{\bigotimes}^+\mathcal{A}[-a+1]$. Donc, dans (I), on peut supposer que $I\subset\{1,\dots,p\}$, dans ce cas la somme correspondante est noée (I_1), ou que $I\subset\{p+1,\dots,p+q\}$, dans ce cas la somme correspondante est notée (I_2).

Ce même raisonnement est vrai pour $(\mathrm{II})=(\mathrm{II}_1)+(\mathrm{II}_2)$.

Concernant (III) et (IV), on pose $I=\{\sigma^{-1}(j+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}$ et on applique le même raisonnement, pour la même raison, il ne nous reste que les termes où $I\subset\{1,\dots,p\}$ dans ce cas les sommes correspondantes sont notées (III_1) et (IV_1) et les termes où $I\subset\{p+1,\dots,p+q\}$ dans ce cas les sommes correspondantes sont notées (III_2) et (IV_2).

Alors, $\delta\circ\ell_2(X,Y)=(\mathrm{I}_1)+(\mathrm{II}_1)+(\mathrm{I}_2)+(\mathrm{II}_2)+(\mathrm{III}_1)+(\mathrm{IV}_1)+(\mathrm{III}_2)+(\mathrm{IV}_2)$. D'autre part,

$$\Big[(\ell_2\otimes id)\circ\Big(\tau_{23}\circ(\delta\otimes id)+id\otimes\delta\Big)$$
$$+(id\otimes\ell_2)\circ\Big(\delta\otimes id+\tau_{12}\circ(id\otimes\delta)\Big)\Big](X,Y)=$$

$$(\ell_2\otimes id)\circ\tau_{23}\Big[\sum_{j=1}^{p-1}\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_j\bigotimes\alpha_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p\bigotimes\alpha_{p+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{p+q}$$
$$-\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha_{[1,j]}&\alpha_{[j+1,p]}\\\alpha_{[j+1,p]}&\alpha_{[1,j]}\end{pmatrix}\alpha_{j+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p\bigotimes\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_j\bigotimes\alpha_{p+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{p+q}\Big]$$

$$+ (\ell_2 \otimes id)\Big[\sum_{i=p+1}^{p+q-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_p \bigotimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_i \bigotimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$$

$$- \varepsilon \begin{pmatrix} \alpha_{[p+1,i]} & \alpha_{[i+1,p+q]} \\ \alpha_{[i+1,p+q]} & \alpha_{[p+1,i]} \end{pmatrix} \alpha_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_p \bigotimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \bigotimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_i \Big]$$

$$+ (id \otimes \ell_2)\Big[\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_j \bigotimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_p \bigotimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$$

$$- \varepsilon \begin{pmatrix} \alpha_{[1,j]} & \alpha_{[j+1,p]} \\ \alpha_{[j+1,p]} & \alpha_{[1,j]} \end{pmatrix} \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_p \bigotimes \alpha_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_j \bigotimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \Big]$$

$$+ (id \otimes \ell_2) \circ \tau_{12}\Big[\sum_{i=p+1}^{p+q-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_p \bigotimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_i \bigotimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$$

$$- \varepsilon \begin{pmatrix} \alpha_{[p+1,i]} & \alpha_{[i+1,p+q]} \\ \alpha_{[i+1,p+q]} & \alpha_{[p+1,i]} \end{pmatrix} \alpha_1 \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_p \bigotimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \bigotimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \ldots \underline{\otimes} \alpha_i \Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\alpha_{[i+1,p]}\alpha_{[p+1,p+q]}} \ell_2(\alpha_{[1,i]}, \alpha_{[p+1,p+q]}) \bigotimes \alpha_{[i+1,p]}$$

$$- \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{\alpha_{[j+1,p+q]}\alpha_{[1,j]}} \ell_2(\alpha_{[j+1,p]}, \alpha_{[p+1,p+q]}) \bigotimes \alpha_{[1,j]}$$

$$+ \sum_{j=p+1}^{p+q-1} \ell_2(\alpha_{[1,p]}, \alpha_{[p+1,j]}) \bigotimes \alpha_{[j+1,p+q]}$$

$$- \sum_{i=p+1}^{p+q-1} (-1)^{\alpha_{[p+1,i]}\alpha_{[i+1,p+q]}} \ell_2(\alpha_{[1,p]}, \alpha_{[i+1,p+q]}) \bigotimes \alpha_{[p+1,i]}$$

$$+ \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{(b-a+1)\alpha_{[1,j]}} \alpha_{[1,j]} \bigotimes \ell_2(\alpha_{[j+1,p]}, \alpha_{[p+1,p+q]})$$

$$- \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\alpha_{[i+1,p]}(\alpha_{[1,i]}+b-a+1)} \alpha_{[i+1,p]} \bigotimes \ell_2(\alpha_{[1,i]}, \alpha_{[p+1,p+q]})$$

$$+ \sum_{i=p+1}^{p+q-1} (-1)^{\alpha_{[p+1,i]}(\alpha_{[1,p]}+b-a+1)} \alpha_{[p+1,i]} \bigotimes \ell_2(\alpha_{[1,p]}, \alpha_{[i+1,p+q]})$$

$$- \sum_{j=p+1}^{p+q-1} (-1)^{\alpha_{[j+1,p+q]}(\alpha_{[1,j]}+b-a+1)} \alpha_{[j+1,p+q]} \bigotimes \ell_2(\alpha_{[1,p]}, \alpha_{[p+1,j]})$$

$$= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8).$$

Dans (I_1), il apparaissait des termes de la forme

$$\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_j \bigotimes \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

avec le signe $\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}}$.
On construit une permutation ρ sur $\{j+1,\dots,p+q\}$ telle que

$$\rho^{-1}(s)=\sigma^{-1}(s),\ \forall j+1\leq s\leq p+q.$$

Alors, $\rho\in Bat(p-j,q)$ vérifiant $j+1\leq\rho^{-1}(k)\leq p<\rho^{-1}(k+1)$ et $\varepsilon_\alpha(\rho^{-1})=\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})$.

De plus, on a

$$(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}}=(-1)^{(b-a+1)\sum_{j<s<k}\alpha_{\rho^{-1}(s)}}(-1)^{(b-a+1)\alpha_{[1,j]}}.$$

Alors, le terme précédent s'écrit :

$$(-1)^{(b-a+1)\alpha_{[1,j]}}\varepsilon_\alpha(\rho^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{j<s<k}\alpha_{\rho^{-1}(s)}}\times$$
$$\times\,\alpha_{[1,j]}\bigotimes\alpha_{\rho^{-1}(j+1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_{\rho^{-1}(k)},\alpha_{\rho^{-1}(k+1)})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\rho^{-1}(p+q)}.$$

Ce même terme apparaît une seule fois dans le second membre et plus précisément dans (5) accompagné du même signe provenant de

$$(-1)^{(b-a+1)\alpha_{[1,j]}}\alpha_{[1,j]}\bigotimes\ell_2\Big(\alpha_{[j+1,p]},\alpha_{[p+1,p+q]}\Big).$$

On obtient, donc, $(\mathrm{I}_1)=(5)$.
Pour (I_2), on a $\{\sigma^{-1}(j+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}\subset\{p+1,\dots,p+q\}$, on pose

$$\{\sigma^{-1}(j+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}=\{p+1,\dots,i\}$$

avec $p+q-j=i-p$, alors, lorsque j varie de 1 à $q-1$, on trouve que i varie de $p+1$ à $p+q-1$. Et on obtient $(\mathrm{I}_2)=(7)$.
Pour (III_1), on a $\{\sigma^{-1}(j+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}\subset\{1,\dots,p\}$, on pose

$$\{\sigma^{-1}(j+1),\dots,\sigma^{-1}(p+q)\}=\{i+1,\dots,p\}$$

avec $p+q-j=p-i$, alors, lorsque j varie de $q+1$ à $p+q-1$, on trouve que i varie de 1 à $p-1$. Et on obtient $(\mathrm{III}_1)=(1)$.

Pour les autres termes, on démontre que $(\mathrm{II}_1)=(2)$, $(\mathrm{II}_2)=(4)$, $(\mathrm{III}_2)=(3)$, $(\mathrm{IV}_1)=(6)$ et $(\mathrm{IV}_2)=(8)$.

L'unicité de ℓ_2 est une conséquence du fait que $(\mathcal{H},\delta)$ est une cogèbre de Lie colibre. (Voir [7]) $\square$

4.3. Algèbre de Lie différentielle graduée associée à une (a,b)-algèbre différentielle

On considère, maintenant, l'espace $\mathcal{H}[a-b-1]$ muni de la graduation $dg'(X) = dg(X) - a + b + 1$ noté simplement par x' pour $X \in \mathcal{H}[a-b-1]$. On pose $\ell'_2(X,Y) = (-1)^{(a-b-1)dg'(X)}\ell_2(X,Y)$. Alors, le crochet ℓ'_2 est de degré 0 dans $\mathcal{H}[a-b-1]$ et la différentielle D reste de degré 1. Et on a

Proposition 4.2.
L'espace $\mathcal{H}[a-b-1]$, muni du crochet ℓ'_2 et de la différentielle D est une algèbre de Lie différentielle graduée : Pour tout X, Y et Z de $\mathcal{H}[a-b-1]$, on a :

$$\textbf{(i)}\quad \ell'_2(X,Y) = -(-1)^{x'y'}\ell'_2(Y,X),$$

$$\begin{aligned}\textbf{(ii)}\quad (-1)^{x'z'}\ell'_2\Big(\ell'_2(X,Y),Z\Big) &+ (-1)^{y'x'}\ell'_2\Big(\ell'_2(Y,Z),X\Big)\\ &+ (-1)^{z'y'}\ell'_2\Big(\ell'_2(Z,X),Y\Big) = 0,\end{aligned}$$

$$\textbf{(iii)}\quad D\Big(\ell'_2(X,Y)\Big) = \ell'_2\Big(D(X),Y\Big) + (-1)^{x'}\ell'_2\Big(X,D(Y)\Big).$$

Démonstration.
(i) Soient $X = \alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{p+q}$. On sait que

$$\begin{aligned}\ell'_2(X,Y) = (-1)^{(a-b-1)x'}\sum_{\substack{\sigma\in Bat(p,q)\\ k;\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}}\times\\ \times\, \alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.\end{aligned}$$

Fixons un couple (σ,k) dans cette somme tel que $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)$. On définit deux permutations τ et ρ de S_{p+q} par :

$$\tau(j) = \begin{cases} j+p, & \text{si } 1\leq j\leq q\\ j-q, & \text{si } q<j\leq q+p.\end{cases} \quad\text{et}\qquad \rho = \sigma\circ\tau.$$

On vérifie que $\rho \in Bat(q,p)$ tel que $\rho^{-1}(k+1) \leq q < \rho^{-1}(k)$. En posant $\beta_j = \alpha_{\tau(j)}, (1 \leq j \leq p+q)$, on aura

$$\beta_{\rho^{-1}(j)} = \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \text{ et } \varepsilon_\beta(\rho^{-1}) = (-1)^{xy}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}).$$

On construit ensuite une nouvelle permutation ν de S_{p+q} définie par :

$$\nu^{-1}(j) = \rho^{-1}(j), \forall j \notin \{k, k+1\}, \nu^{-1}(k) = \rho^{-1}(k+1) \text{ et } \nu^{-1}(k+1) = \rho^{-1}(k).$$

On vérifie que $\nu \in Bat(q,p)$ tel que

$$\begin{aligned}\nu^{-1}(k) \leq q < \nu^{-1}(k+1) \text{ et}\\ \varepsilon_\beta(\nu^{-1}) = (-1)^{\beta_{\rho^{-1}(k)}\beta_{\rho^{-1}(k+1)}}\varepsilon_\beta(\rho^{-1}) = (-1)^{\alpha_{\sigma^{-1}(k)}\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}}(-1)^{xy}\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}).\end{aligned}$$

De plus l'application $(\sigma,k) \mapsto (\nu,k)$ est une bijection sur les ensembles correspondants.

Alors,

$$\begin{aligned}\ell_2'(X,Y) &= (-1)^{(a-b-1)x'}(-1)^{xy} \sum_{\substack{\nu\in Bat(q,p)\\ k;\ \nu^{-1}(k)\leq q<\nu^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\beta(\nu^{-1})(-1)^{\beta_{\nu^{-1}(k)}\beta_{\nu^{-1}(k+1)}}\times\\ &\qquad \times \beta_{\nu^{-1}(1)}\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\ell(\beta_{\nu^{-1}(k+1)},\beta_{\nu^{-1}(k)})\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\beta_{\nu^{-1}(p+q)}\\ &= (-1)^{(a-b-1)x'}(-1)^{xy+b-a}\sum_{\substack{\nu\in Bat(q,p)\\ k;\ \nu^{-1}(k)\leq q<\nu^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\beta(\nu^{-1})\times\\ &\qquad \times \beta_{\nu^{-1}(1)}\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\ell(\beta_{\nu^{-1}(k)},\beta_{\nu^{-1}(k+1)})\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\beta_{\nu^{-1}(p+q)}\\ &= -(-1)^{x'y'}\ell_2'(Y,X).\end{aligned}$$

(ii) Soient $X = \alpha_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\alpha_p$, $Y = \beta_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\beta_q$ et $Z = \gamma_1\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\gamma_r$. Posons

$$\xi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } 1\leq i\leq p\\ \beta_{i-p} & \text{si } p+1\leq i\leq p+q\\ \gamma_{i-p-q} & \text{si } p+q+1\leq i\leq p+q+r.\end{cases}$$

On revient à ℓ_2 en écrivant l'identité de Jacobi sous la forme :

$$\begin{aligned}&(-1)^{x'z'}\ell_2'\left(\ell_2'(X,Y),Z\right) + (-1)^{y'x'}\ell_2'\left(\ell_2'(Y,Z),X\right) + (-1)^{z'y'}\ell_2'\left(\ell_2'(Z,X),Y\right)\\ &= (-1)^{(a-b-1)(x+y+z+1)}\Big\{(-1)^{xz}\ell_2\left(\ell_2(X,Y),Z\right) + (-1)^{yx}\ell_2\left(\ell_2(Y,Z),X\right)\\ &\qquad\qquad + (-1)^{zy}\ell_2(\ell_2(Z,X),Y)\Big\}.\end{aligned}$$

En écrivant $(-1)^{xz}\ell_2\left(\ell_2(X,Y),Z\right)$, on trouve des termes de la forme :

$$(I_1): \ (-1)^{xz}\varepsilon_\xi(\rho_{I_1}^{-1})\xi_{i_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_i,\beta_j)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\beta_k,\gamma_l)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{i_{p+q+r}}$$
$$(I_2): \ (-1)^{xz}\varepsilon_\xi(\rho_{I_2}^{-1})\xi_{j_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\beta_j,\gamma_l)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_i,\beta_k)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{j_{p+q+r}}$$
$$(I_3): \ (-1)^{xz}\varepsilon_\xi(\rho_{I_3}^{-1})\xi_{k_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_i,\beta_j)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_k,\gamma_l)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{k_{p+q+r}}$$
$$(I_4): \ (-1)^{xz}\varepsilon_\xi(\rho_{I_4}^{-1})\xi_{l_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_i,\gamma_l)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_k,\beta_j)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{l_{p+q+r}}$$
$$(I_5): \ (-1)^{xz}\varepsilon_\xi(\rho_{I_5}^{-1})\xi_{s_1}\underline{\otimes}\dots\ell(\ell(\alpha_i,\beta_j),\gamma_k)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{s_{p+q+r}}.$$

En écrivant $(-1)^{yx}\ell_2\left(\ell_2(Y,Z),X\right)$, on trouve des termes de la forme :

$$(II_1): \ (-1)^{yx}\varepsilon_\xi(\rho_{II_1}^{-1})\xi_{i_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\beta_j,\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\beta_k,\gamma_l)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{i_{p+q+r}}$$
$$(II_2): \ (-1)^{yx}\varepsilon_\xi(\rho_{II_2}^{-1})\xi_{j_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\beta_j,\gamma_l)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\beta_k,\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{j_{p+q+r}}$$
$$(II_3): \ (-1)^{yx}\varepsilon_\xi(\rho_{II_3}^{-1})\xi_{t_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\beta_j,\gamma_k)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\gamma_l,\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{t_{p+q+r}}$$
$$(II_4): \ (-1)^{yx}\varepsilon_\xi(\rho_{II_4}^{-1})\xi_{r_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\gamma_k,\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\beta_j,\gamma_l)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{r_{p+q+r}}$$
$$(II_5): \ (-1)^{yx}\varepsilon_\xi(\rho_{II_5}^{-1})\xi_{s_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\ell(\beta_j,\gamma_k),\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{s_{p+q+r}}.$$

En écrivant $(-1)^{zy}\ell_2\left(\ell_2(Z,X),Y\right)$, on trouve des termes de la forme :

$$(III_1): (-1)^{zy}\varepsilon_\xi(\rho_{III_1}^{-1})\xi_{k_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_i,\beta_j)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\gamma_l,\alpha_k)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{k_{p+q+r}}$$
$$(III_2): (-1)^{zy}\varepsilon_\xi(\rho_{III_2}^{-1})\xi_{l_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\gamma_l,\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\alpha_k,\beta_j)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{l_{p+q+r}}$$
$$(III_3): (-1)^{zy}\varepsilon_\xi(\rho_{III_3}^{-1})\xi_{r_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\gamma_k,\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\gamma_l,\beta_j)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{r_{p+q+r}}$$
$$(III_4): (-1)^{zy}\varepsilon_\xi(\rho_{III_4}^{-1})\xi_{t_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\gamma_k,\beta_j)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\gamma_l,\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{t_{p+q+r}}$$
$$(III_5): (-1)^{zy}\varepsilon_\xi(\rho_{III_5}^{-1})\xi_{s_1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\ell(\ell(\gamma_k,\alpha_i),\beta_j)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\xi_{s_{p+q+r}}.$$

On vérifie grâce à la $(b-a+1)$-antisymétrie de ℓ que :
$(I_1)+(II_1)=0, (I_2)+(II_2)=0, (I_3)+(III_1)=0, (I_4)+(III_2)=0, (II_3)+(III_4)=0, (II_4)+(III_3)=0$. Et grâce à la relation de Jacobi pour ℓ que : $(I_5)+(II_5)+(III_5)=0$.

(iii) On rappelle que $D=d_1+\mu_1$ où

$$d_1(\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n)=\sum_{1\leq i\leq n}(-1)^{\sum_{s<i}\alpha_s}\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}d(\alpha_i)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n)=\sum_{1\le i<n}(-1)^{\sum_{s<i}\alpha_s}\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu(\alpha_i,\alpha_{i+1})\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_n.$$

Vérifions d'abord que $\mu_1\left(\ell_2'(X,Y)\right)=\ell_2'\left(\mu_1(X),Y\right)+(-1)^{x'}\ell_2'\left(X,\mu_1(Y)\right)$.

Soient $X=\alpha_1\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_p$ et $Y=\alpha_{p+1}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{p+q}$.

D'une part, on développe $\mu_1(\ell_2'(X,Y))$, on trouve les types de termes suivants :

(I) : $\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}\big)\dots\ell\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$
où $\sigma\in Bat(p,q), i<k-1$ et $\sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)$,

(II) : $\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\ell\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\big)\dots\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}\big)\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$
où $\sigma\in Bat(p,q), i>k+1$ et $\sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)$,

(III) : $\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu\big(\alpha_{\sigma^{-1}(k-1)},\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$
où $\sigma\in Bat(p,q), 1\le k\le p+q-1$ et $\sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)$,

(IV) : $\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\mu\big(\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}),\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}\big)\underline{\otimes}\dots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$
où $\sigma\in Bat(p,q), 1\le k\le p+q-1$ et $\sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)$.

Parmi les termes de (I), on distingue quatre cas :

(I_1) lorsque $\{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\}\subset\{1,\dots,p\}$,

(I_2) lorsque $\{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\}\subset\{p+1,\dots,p+q\}$,

(I_3) lorsque $\sigma^{-1}(i)\le p<\sigma^{-1}(i+1)$,

(I_4) lorsque $\sigma^{-1}(i+1)\le p<\sigma^{-1}(i)$.

Et de même pour (II). Il y a des simplifications entre les termes de (I_3) et (I_4) et aussi entre les termes de (II_3) et (II_4). Il ne reste que $(I_1),(I_2),(II_1)$ et (II_2).

On sépare aussi les termes de type (III) et (IV) en deux catégories. On a donc :

(III_1) lorsque $\sigma^{-1}(k-1)<\sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k+1)$,

(III_2) lorsque $\sigma^{-1}(k)\le p<\sigma^{-1}(k-1)<\sigma^{-1}(k+1)$,

(IV_1) lorsque $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+2) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)$,

(IV_2) lorsque $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1) < \sigma^{-1}(k+2)$.
Alors,

$\mu_1(\ell'_2(X,Y)) = (I_1) + (I_2) + (II_1) + (II_2) + (III_1) + (III_2) + (IV_1) + (IV_2)$.

D'autre part, dans le second membre, on a

$$\ell'_2(\mu_1(X),Y) = \\ (-1)^{(a-b-1)(x'+1)} \sum_{\substack{i<k-1\\ \sigma\in Bat(p,q)\\ 1\leq i<p\\ k\notin\{i,i+1\};\sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{\sum_{s<i}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}}(-1)^{(b-a+1)(\sum_{s<k}\alpha_{\sigma^{-1}(s)}+1)}\times$$

$$\times\, \alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\ldots\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)})\ldots\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\ldots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

On trouve les types de termes suivants :

(I'):$\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\ldots\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)})\ldots\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\ldots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$;
$\sigma\in Bat(p,q), i<k-1, \sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)$ et $1\leq\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\leq p$,
(II'):$\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\ldots\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})\ldots\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)},\alpha_{\sigma^{-1}(i+1)})\ldots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$;
$\sigma\in Bat(p,q), i>k+1, \sigma^{-1}(k)\leq p<\sigma^{-1}(k+1)$ et $1\leq\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i+1)\leq p$
et (III'):$\alpha_{\sigma^{-1}(1)}\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\ell(\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}),\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)})\underline{\otimes}\ldots\underline{\otimes}\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$;
$\sigma\in Bat(p,q), 1\leq k\leq p+q-2$ et $\sigma^{-1}(k)<\sigma^{-1}(k+1)\leq p<\sigma^{-1}(k+2)$.

Or, d'après l'identité de Leibniz, on a

$$\ell(\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}),\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}) = \\ (-1)^{(b-a+1)(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}+1)}\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)})) \\ +(-1)^{b-a+1+\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}}\mu(\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)},\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}),\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}),$$

on sépare, alors, (III') en $(\text{III'}_1) + (\text{III'}_2)$.

Donc, $\ell'_2(\mu_1(X),Y) =$ (I')+(II')+$(\text{III'}_1) + (\text{III'}_2)$.
De même, on trouve que

$$(-1)^{x'}\ell'_2(X,\mu_1(Y)) = (\text{I''})+(\text{II''})+(\text{III''}_1)+(\text{III''}_2).$$

On vérifie, enfin, que $(I_1) =$ (I'), $(II_1) =$ (II'), $(III_1) = (\text{III'}_1)$, $(IV_1) = (\text{III'}_2)$, $(I_2) =$ (I"), $(II_2) =$ (II"), $(IV_2) = (\text{III''}_1)$ et $(III_2) = (\text{III''}_2)$.

De même, on vérifie que

$$D_1\left(\ell_2'(X,Y)\right) = \ell_2'\left(D_1(X),Y\right) + (-1)^{x'}\ell_2'\left(X,D_1(Y)\right).$$

$\square$

4.4. La L_∞ algèbre $S^+(\mathcal{H}[a-b])$

Dans le paragraphe précédent, on a montré que $\Big(\mathcal{H}[a-b-1],\ell_2',D\Big)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée. On considère l'espace $\mathcal{H}[a-b]$ muni de la graduation

$$dg''(X) = dg'(X) - 1 = dg(X) - a + b := x''\ ,\ \text{pour tout } X \in \mathcal{H}[a-b].$$

On voudrait construire la cogèbre cocommutative coassociative $(S^+(\mathcal{H}[a-b]),\Delta)$, où $S^+(\mathcal{H}[a-b]) = \bigoplus_{n\geq 1} S^n(\mathcal{H}[a-b])$ et Δ est son coproduit qui est de degré 0 et défini par :

$\forall X_1\dots X_n \in S^n(\mathcal{H}[a-b])$,

$$\Delta(X_1\dots X_n) = \sum_{\substack{I\cup J=\{1,\dots n\}\\ \#I,\#J>0}} \varepsilon\begin{pmatrix} x_1''\dots x_n'' \\ x_I''x_J'' \end{pmatrix} X_I \bigotimes X_J.$$

Le crochet ℓ_2' était antisymétrique de degré 0 sur $\mathcal{H}[a-b-1]$. Comme l'on veut une codérivation de degré 1 pour Δ, on pose $\ell_2''(X,Y) = (-1)^{x''}\ell_2'(X,Y)$ qui est une application symétrique sur $\mathcal{H}[a-b]$ de degré 1. On a

Proposition 4.3. *Pour tout X, Y, $Z \in \mathcal{H}[a-b]$, on a :*

(i) $\ell_2''(X,Y) = (-1)^{x''y''}\ell_2''(Y,X)$,

(ii) $(-1)^{x''z''}\ell_2''(\ell_2''(X,Y),Z) + (-1)^{y''x''}\ell_2''(\ell_2''(Y,Z),X) + (-1)^{z''y''}\ell_2''(\ell_2''(Z,X),Y) = 0$,

(iii) $D(\ell_2''(X,Y)) = -\ell_2''(D(X),Y) + (-1)^{1+x''}\ell_2''(X,D(Y))$.

Démonstration.

(i) On a

$$\begin{aligned}\ell_2''(X,Y) &= (-1)^{x''}\ell_2'(X,Y) = (-1)^{x''}(-1)^{x'y'+1}\ell_2'(Y,X)\\ &= (-1)^{x''+(x''+1)(y''+1)+1}(-1)^{y''}\ell_2''(Y,X)\\ &= (-1)^{x''y''}\ell_2''(Y,X).\end{aligned}$$

(ii) On a

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{x''z''}\ell''_2(\ell''_2(X,Y),Z)+(-1)^{y''x''}\ell''_2(\ell''_2(Y,Z),X)\\
&\qquad\qquad\qquad+(-1)^{z''y''}\ell''_2(\ell''_2(Z,X),Y)=\\
&(-1)^{x'+y'+z'+1}(-1)^{x'z'}\ell'_2\left(\ell'_2(X,Y),Z\right)+(-1)^{y'x'}\ell'_2((\ell'_2(Y,Z),X)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+(-1)^{z'y'}\ell'_2(\ell'_2(Z,X),Y)\Big)=0.
\end{aligned}
$$

(iii) On a

$$
\begin{aligned}
D(\ell''_2(X,Y)) &= (-1)^{x''}D(\ell'_2(X,Y))\\
&= (-1)^{x''}\left(\ell'_2\left(D(X),Y\right)+(-1)^{x'}\ell'_2\left(X,D(Y)\right)\right)\\
&= (-1)^{x''}\left((-1)^{x''+1}\ell''_2\left(D(X),Y\right)+(-1)^{x'+x''}\ell''_2\left(X,D(Y)\right)\right)\\
&= -\ell''_2(D(X),Y)+(-1)^{1+x''}\ell''_2(X,D(Y)).
\end{aligned}
$$

□

On prolonge ℓ''_2 à $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ de façon unique comme une codérivation ℓ'' de Δ de degré 1 en posant :

$$
\ell''(X_1\ldots X_n)=\sum_{i<j}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n\\ x''_ix''_jx''_1\ldots\widehat{ij}\ldots x''_n\end{pmatrix}\ell''_2(X_i,X_j).X_1\ldots\widehat{ij}\ldots X_n.
$$

En utilisant l'identité de Jacobi, on peut vérifier que $\ell''\circ\ell''=0$.

On prolonge, aussi, la différentielle D à $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ comme l'unique codérivation m de Δ toujours de degré 1 en posant :

$$
m(X_1\ldots X_n)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n\\ x''_ix''_1\ldots\widehat{i}\ldots x''_n\end{pmatrix}D(X_i).X_1\ldots\widehat{i}\ldots X_n.
$$

Elle vérifie $m\circ m=0$.

Si on pose $Q_1=D$, $Q_2=\ell''_2$, $Q_k=0$, si $k\geq 3$ et

$$
Q(X_1\ldots X_n)=\sum_{\substack{I\cup J=\{1,\ldots,n\}\\ I\neq\emptyset}}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n\\ x''_Ix''_J\end{pmatrix}Q_{\#I}(X_I).X_J.
$$

Alors, $Q=m+\ell''$ et vérifie $Q^2=0$ et $(Q\otimes id+id\otimes Q)\circ\Delta=\Delta\circ Q$.

Donc, le complexe $\big(S^+(\mathcal{H}[a-b]),\Delta,Q\big)$ est une cogèbre cocommuative coassociative et codifférentielle, alors, c'est une L_∞ algèbre.

4.5. La C_∞ algèbre $S^+(\mathcal{H}[a-b])$

L'espace $(\mathcal{H},\delta,D)$ étant une cogèbre de Lie codifférentielle, on définit un cocrochet δ'' de degré $a-b$ sur $\mathcal{H}[a-b]$ par :

$$\delta''(X)=\sum_{\substack{U\underline{\otimes}V=X\\ U,V\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)u''}\Big(U\bigotimes V+(-1)^{u''v''+a-b+1}V\bigotimes U\Big).$$

On prolonge δ'' à $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ par :

$$\delta''(X_1\dots X_n)=\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_I x''_s x''_J\end{smallmatrix}\right)\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\times$$
$$\times\Big(X_I.U_s\bigotimes V_s.X_J+(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1}X_I.V_s\bigotimes U_s.X_J\Big).$$

Alors, δ'' est un cocrochet sur $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ de degré $a-b$. En notant τ'' la volte dans $S^+(\mathcal{H}[a-b])$, δ'' vérifie :

Proposition 4.4. *i)* $\tau''\circ\delta''=-(-1)^{a-b}\delta''$ *:* δ'' *est* $(a-b)$*-coantisymétrique,*
ii) $\Big(id^{\otimes 3}+\tau''_{12}\circ\tau''_{23}+\tau''_{23}\circ\tau''_{12}\Big)\circ(\delta''\otimes id)\circ\delta''=0$ *: identité de coJacobi,*
iii) $(id\otimes\Delta)\circ\delta''=(\delta''\otimes id)\circ\Delta+\tau''_{12}\circ(id\otimes\delta'')\circ\Delta$ *: identité de coLeibniz.*

Démonstration. **(i)** On a

$$\tau''\circ\delta''(X_1\dots X_n)=$$
$$\tau''\Big[\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_J x''_s x''_I\end{smallmatrix}\right)\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_J+u''_s)}\times$$
$$\times\Big(X_J.U_s\bigotimes V_s.X_I+(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1}X_J.V_s\bigotimes U_s.X_I\Big)\Big]$$

$$=\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_J x''_s x''_I\end{smallmatrix}\right)\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_J+u''_s)}\times$$
$$\times\Big[(-1)^{(x''_I+v''_s)(x''_J+u''_s)}V_s.X_I\bigotimes X_J.U_s$$
$$+(-1)^{(x''_J+v''_s)(x''_I+u''_s)}(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1}U_s.X_I\bigotimes X_J.V_s\Big]$$

$$= (-1)^{a-b+1}\Big[\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n\\ x''_I x''_s x''_J\end{pmatrix} \sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\times$$

$$\times\Big(X_I.U_s\bigotimes V_s.X_J+(-1)^{u''_s v''_s+a-b+1}X_I.V_s\bigotimes U_s.X_J\Big)\Big]$$

$$= (-1)^{a-b+1}\delta''(X_1\dots X_n).$$

(ii) On calcule $(\delta''\otimes id)\circ\delta''(X_1\dots X_n)$, on trouve des termes produit et produit tensoriel de facteurs $X_I,X_J,X_K,U_s,V_s,U_t,V_t$ pour $I\cup J\cup K\cup\{s,t\}=\{1,\dots,n\}$, $s\neq t$, $X_s=U_s\underline{\otimes}V_s$ et $X_t=U_t\underline{\otimes}V_t$ et des termes produit et produit tensoriel de facteurs X_I,X_J,X_K,U_s,V_s,W_s pour $I\cup J\cup K\cup\{s\}=\{1,\dots,n\}$ et $X_s=U_s\underline{\otimes}V_s\underline{\otimes}W_s$.
Pour retrouver les termes du premier type, on part de $X_I\bigotimes X_J\bigotimes X_K$ et on ajoute les U_s,V_s,U_t,V_t en suivant le tableau :

$$U_t\bigotimes V_t.U_s\bigotimes V_s,\ \ V_t\bigotimes U_t.U_s\bigotimes V_s,\ \ U_t\bigotimes V_t.V_s\bigotimes U_s,\ \ V_t\bigotimes U_t.V_s\bigotimes U_s,$$

$$U_s.U_t\bigotimes V_t\bigotimes V_s,\ \ U_s.V_t\bigotimes U_t\bigotimes V_s,\ \ V_s.U_t\bigotimes V_t\bigotimes U_s,\ \ V_s.V_t\bigotimes U_t\bigotimes U_s,$$

$$U_s\bigotimes U_t\bigotimes V_s.V_t,\ \ U_s\bigotimes V_t\bigotimes V_s.U_t,\ \ V_s\bigotimes U_t\bigotimes U_s.V_t,\ \ V_s\bigotimes V_t\bigotimes U_s.U_t.$$

Pour retrouver les termes du deuxième type, on part de $X_I\bigotimes X_J\bigotimes X_K$ et on ajoute les U_s,V_s,W_s en suivant le tableau :

$$U_s\bigotimes V_s\bigotimes W_s,\quad V_s\bigotimes U_s\bigotimes W_s,\quad V_s\bigotimes W_s\bigotimes U_s,\quad W_s\bigotimes V_s\bigotimes U_s.$$

Par exemple, le premier élément $U_t\bigotimes V_t.U_s\bigotimes V_s$ du tableau correspond au terme

$$(1) : X_I.U_t\bigotimes V_t.X_J.U_s\bigotimes V_s.X_K.$$

Pour $s<t$, ce terme apparaît deux fois dans $\Big(id^{\otimes 3}+\tau''_{12}\circ\tau''_{23}+\tau''_{23}\circ\tau''_{12}\Big)\circ(\delta''\otimes id)\circ\delta''(X_1\dots X_n)$:

1) Une fois dans $id^{\otimes 3}\circ(\delta''\otimes id)\circ\delta''(X_1\dots X_n)$ avec le signe ε_1 obtenu ainsi :
- On part de $X_1\dots X_n$, on le ramène en $X_I.X_t.X_J.X_s.X_K$ avec le signe $\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n\\ x''_I\ x''_t\ x''_J\ x''_s\ x''_K\end{pmatrix}$.

- On applique δ'' sur $X_I.X_t.X_J.X_s.X_K$ et précisément lorsqu'on coupe X_s, il apparaît le terme $X_I.X_t.X_J.U_s \bigotimes V_s.X_K$ une seule fois avec le signe

$$(-1)^{(a-b)(x''_I+x''_t+x''_J+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n \\ x''_I\ x''_t\ x''_J\ x''_s\ x''_K \end{pmatrix}.$$

- Ensuite, on applique $(\delta'' \otimes id)$ sur $X_I.X_t.X_J.U_s \bigotimes V_s.X_K$ et précisément on coupe X_t, on obtient le terme $X_I.U_t \bigotimes V_t.X_J.U_s \bigotimes V_s.X_K$ une seule fois avec le signe

$$\begin{aligned}&(-1)^{(a-b)(x''_I+x''_t+x''_J+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n \\ x''_I\ x''_t\ x''_J\ x''_s\ x''_K \end{pmatrix}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_t)}\\ &= (-1)^{(a-b)(x''_J+v''_t+u''_s+a-b)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n \\ x''_I\ x''_t\ x''_J\ x''_s\ x''_K \end{pmatrix} = \varepsilon_1.\end{aligned}$$

2) Le terme (1) apparaît une autre fois dans $\tau''_{12} \circ \tau''_{23} \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \ldots X_n)$ avec le signe ε'_1 :

- On part de $X_1 \ldots X_n$, on le ramène en $X_J.X_s.X_K.X_t.X_I$ avec le signe $\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n \\ x''_J\ x''_s\ x''_K\ x''_t\ x''_I \end{pmatrix}$.

- On applique δ'' sur $X_J.X_s.X_K.X_t.X_I$ et plus précisément, lorsqu'on coupe X_t, alors, le terme $X_J.X_s.X_K.V_t \bigotimes U_t.X_I$ apparaît une seule fois avec le signe

$$(-1)^{(a-b)(x''_J+x''_s+x''_K+u''_t)}(-1)^{u''_tv''_t+a-b+1}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n \\ x''_J\ x''_s\ x''_K\ x''_t\ x''_I \end{pmatrix}$$

qui s'écrit encore $V_t.X_J.X_s.X_K \bigotimes X_I.U_t$ accompagné du signe

$$(-1)^{(a-b)(x''_J+x''_s+x''_K+u''_t)+u''_tv''_t+a-b+1+u''_tx''_I+v''_t(x''_K+x''_s+x''_J)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n \\ x''_J\ x''_s\ x''_K\ x''_t\ x''_I \end{pmatrix}.$$

- Ensuite, on applique $(\delta'' \otimes id)$ sur $V_t.X_J.X_s.X_K \bigotimes X_I.U_t$ et précisément on coupe X_s, on obtient une seule fois le terme $V_t.X_J.U_s \bigotimes V_s.X_K \bigotimes X_I.U_t$ avec le signe

$$\begin{aligned}&(-1)^{(a-b)(x''_J+x''_s+x''_K+u''_t)+u''_tv''_t+a-b+1+u''_tx''_I+v''_t(x''_K+x''_s+x''_J)}(-1)^{(a-b)(v''_t+x''_J+u''_s)}\\ &\times\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n \\ x''_J\ x''_s\ x''_K\ x''_t\ x''_I \end{pmatrix}\\ &= (-1)^{(a-b)(x''_t+x''_K+v''_s)+u''_tv''_t+a-b+1+u''_tx''_I+v''_t(x''_K+x''_s+x''_J)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\ldots x''_n \\ x''_J\ x''_s\ x''_K\ x''_t\ x''_I \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- Puis, on applique $\tau''_{12}\circ\tau''_{23}$, le terme (1) $= X_I.U_t\bigotimes V_t.X_J.U_s\bigotimes V_s.X_K$ apparaît avec le signe

$$(-1)^{(a-b)(x''_t+x''_K+v''_s)+u''_tv''_t+a-b+1}(-1)^{u''_tx''_I+v''_t(x''_K+x''_s+x''_J)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_J\ x''_s\ x''_K\ x''_t\ x''_I\end{pmatrix}$$
$$\times(-1)^{(x''_I+u''_t)(v''_t+x''_J+u''_s+v''_s+x''_K)+x''_Iu''_t}$$
$$=(-1)^{(a-b)(x''_J+v''_t+u''_s+a-b)+1}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_I\ x''_t\ x''_J\ x''_s\ x''_K\end{pmatrix}$$
$$=-\varepsilon_1.$$

Finalement, ces deux termes se simplifient.

Un calcul pénible montre, de même, que tous les termes du tableau se simplifient dans $\left(id^{\otimes 3}+\tau''_{12}\circ\tau''_{23}+\tau''_{23}\circ\tau''_{12}\right)\circ(\delta''\otimes id)\circ\delta''(X_1\dots X_n)$.

(iii) D'une part, on a

$$(id\otimes\Delta)\circ\delta''(X_1\dots X_n)=$$
$$\sum_{\substack{1\le s\le n\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_Ix''_sx''_J\end{pmatrix}\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\times$$
$$\times(id\otimes\Delta)\left[X_I.U_s\bigotimes V_s.X_J+(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1}X_I.V_s\bigotimes U_s.X_J\right]$$
$$=\sum_{\substack{1\le s\le n\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_Ix''_sx''_J\end{pmatrix}\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\sum_{K\cup L=J}$$
$$\left[\varepsilon\begin{pmatrix} v''_sx''_J \\ x''_Kv''_sx''_L\end{pmatrix}X_I.U_s\bigotimes X_K\bigotimes V_s.X_L+\varepsilon\begin{pmatrix} v''_sx''_J \\ v''_sx''_Lx''_K\end{pmatrix}X_I.U_s\bigotimes V_s.X_L\bigotimes X_K\right.$$
$$+(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1}\left(\varepsilon\begin{pmatrix} u''_sx''_J \\ x''_Ku''_sx''_L\end{pmatrix}X_I.V_s\bigotimes X_K\bigotimes U_s.X_L\right.$$
$$\left.\left.+\varepsilon\begin{pmatrix} u''_sx''_J \\ u''_sx''_Lx''_K\end{pmatrix}X_I.V_s\bigotimes U_s.X_L\bigotimes X_K\right)\right]$$
$$=(I)+(II)+(III)+(IV).$$

D'autre part, on a

$$(id\otimes\delta'')\circ\Delta(X_1\dots X_n)=\sum_{\substack{K\cup J=\{1,\dots n\}\\ K,J\neq\emptyset}}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_Kx''_J\end{pmatrix}(id\otimes\delta'')(X_K\bigotimes X_J)$$
$$=\sum_{\substack{K\cup J=\{1,\dots n\}\\ K,J\neq\emptyset}}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_Kx''_J\end{pmatrix}(-1)^{(a-b)x''_K}\sum_{\substack{s\in J\\ I\cup L=J\setminus\{s\}}}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_J \\ x''_Ix''_sx''_L\end{pmatrix}\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s+a-b)}$$
$$\times\left[X_K\bigotimes X_I.U_s\bigotimes V_s.X_L+(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1}X_K\bigotimes X_I.V_s\bigotimes U_s.X_L\right].$$

Alors, en appliquant τ''_{12}, on obtient

$$\tau''_{12}\circ(id\otimes\delta'')\circ\Delta(X_1\dots X_n)=$$

$$\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup K\cup L=\{1,\dots,n\}\backslash\{s\}\\ K\neq\emptyset}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_Kx''_J\end{pmatrix}(-1)^{(a-b)x''_K}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_Kx''_J\\ x''_Kx''_Ix''_sx''_L\end{pmatrix}\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}$$

$$\times\Big[(-1)^{x''_K(x''_I+u''_s)}X_I.U_s\bigotimes X_K\bigotimes V_s.X_L$$

$$+(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1+x''_K(x''_I+v''_s)}X_I.V_s\bigotimes X_K\bigotimes U_s.X_L\Big]$$

$$=(1)+(2).$$

De plus, on a

$$(\delta''\otimes id)\circ\Delta(X_1\dots X_n)=\sum_{\substack{K\cup J=\{1,\dots n\}\\ K,J\neq\emptyset}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_Jx''_K\end{pmatrix}(\delta''\otimes id)(X_J\bigotimes X_K)$$

$$=\sum_{\substack{K\cup J=\{1,\dots n\}\\ K,J\neq\emptyset}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_Jx''_K\end{pmatrix}\sum_{\substack{s\in J\\ I\cup L=J\backslash\{s\}}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_J\\ x''_Ix''_sx''_L\end{pmatrix}\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\times$$

$$\times\left[X_I.U_s\bigotimes V_s.X_L\bigotimes X_K+(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1}X_I.V_s\bigotimes U_s.X_L\bigotimes X_K\right]$$

$$=\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ I\cup K\cup L=\{1,\dots,n\}\backslash\{s\}\\ K\neq\emptyset}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_Jx''_K\end{pmatrix}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_Jx''_K\\ x''_Ix''_sx''_Lx''_K\end{pmatrix}\sum_{\substack{U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ U_s,V_s\neq\emptyset}}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\times$$

$$\times\left[X_I.U_s\bigotimes V_s.X_L\bigotimes X_K+(-1)^{u''_sv''_s+a-b+1}X_I.V_s\bigotimes U_s.X_L\bigotimes X_K\right]$$

$$=(3)+(4).$$

En examinant les monômes de type $(I),(II),(III)$ ou (IV) du premier membre, on constate qu'ils apparaissent chaque fois dans un des types bien déterminé du second membre et chacun apparaît une fois et une seule. Il suffit, alors, de vérifier l'égalité des signes. Par exemple : dans (I), le terme $X_I.U_s\otimes X_K\otimes V_s.X_L$ apparaît avec le signe

$$(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_I\ x''_s\ x''_J\end{pmatrix}\varepsilon\begin{pmatrix}v''_sx''_J\\ x''_K\ v''_s\ x''_L\end{pmatrix}$$

$$=(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_n\\ x''_I\ x''_s\ x''_J\end{pmatrix}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_Iu''_sv''_sx''_J\\ x''_Iu''_sx''_K\ v''_s\ x''_L\end{pmatrix}.$$

Or

$$\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_s \dots x''_n \\ x''_I \ x''_s \ x''_J \end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots u''_s v''_s \dots x''_n \\ x''_I \ u''_s v''_s \ x''_J \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)\sum_{\substack{i<s \\ i\in J}} x''_i} (-1)^{(a-b)\sum_{\substack{i>s \\ i\in I}} x''_i}.$$

Le signe total de (I) est :

$$(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}(-1)^{(a-b)\sum_{\substack{i<s \\ i\in K\cup L}} x''_i}(-1)^{(a-b)\sum_{\substack{i>s \\ i\in I}} x''_i}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots u''_s v''_s \dots x''_n \\ x''_I \ u''_s x''_K v''_s \ x''_L \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{(a-b)u''_s}(-1)^{(a-b)\sum_{i<s} x''_i}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots u''_s v''_s \dots x''_n \\ x''_I \ u''_s x''_K v''_s \ x''_L \end{pmatrix}.$$

Dans (1), le terme $X_I.U_s \bigotimes X_K \bigotimes V_s.X_L$ apparaît avec le signe

$$(-1)^{(a-b)x''_K}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K \ x''_I \ x''_s \ x''_L \end{pmatrix}(-1)^{x''_K(x''_I+u''_s)}$$
$$= (-1)^{(a-b)(x''_I+x''_K+u''_s)+x''_K(x''_I+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots u''_s v''_s \dots x''_n \\ x''_K x''_I u''_s \ v''_s \ x''_L \end{pmatrix}\times$$
$$\times (-1)^{(a-b)\sum_{\substack{i<s \\ i\in L}} x''_i}(-1)^{(a-b)\sum_{\substack{i>s \\ i\in K\cup I}} x''_i}$$
$$= (-1)^{(a-b)u''_s}(-1)^{x''_K(x''_I+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots u''_s v''_s \dots x''_n \\ x''_K x''_I u''_s \ v''_s \ x''_L \end{pmatrix}(-1)^{(a-b)\sum_{i<s} x''_i}$$
$$= (-1)^{(a-b)u''_s}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots u''_s v''_s \dots x''_n \\ x''_I u''_s \ x''_K v''_s \ x''_L \end{pmatrix}(-1)^{(a-b)\sum_{i<s} x''_i}.$$

Alors, on a $(I) = (1)$.

De même, on vérifie que $(II) = (3)$, $(III) = (2)$ et $(IV) = (4)$. $\square$

On a prouvé que $(S^+(\mathcal{H}[a-b]), \delta'')$ est une cogèbre de Lie. Montrons qu'avec $Q = m + \ell''$, elle est codifférentielle. Revenons, donc, aux opérateurs m et ℓ'' définis sur $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ par :

$$m(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_i x''_1 \dots \widehat{i} \dots x''_n \end{pmatrix} D(X_i).X_1 \dots \widehat{i} \dots X_n$$

et

$$\ell''(X_1 \dots X_n) = \sum_{i<j} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_i x''_j x''_1 \dots \widehat{ij} \dots x''_n \end{pmatrix} \ell''_2(X_i, X_j).X_1 \dots \widehat{ij} \dots X_n.$$

Proposition 4.5. *m et ℓ'' sont des codérivations de δ'' de degré 1, ils vérifient :*

(i) $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \delta'' = (-1)^{a-b}\delta'' \circ m$.

(ii) $(\ell'' \otimes id + id \otimes \ell'') \circ \delta'' = (-1)^{a-b}\delta'' \circ \ell''$.

Démonstration. **(i)** D'une part, on a

$$\delta'' \circ m(X_1 \dots X_n) = \delta''\Big[\sum_{s=1}^{n}(-1)^{\sum_{i<s} x_i''} X_1 \dots D(X_s) \dots X_n\Big]$$

$$= \sum_{\substack{t<s \\ U_t \underline{\otimes} V_t = X_t \\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s,t\}}} (-1)^{\sum_{i<s} x_i''}\Big[(-1)^{(a-b)(x_I''+u_t'')}\varepsilon\begin{pmatrix} x_1''\dots x_t''\dots D(x_s)''\dots x_n'' \\ x_I'' \ x_t'' \ D(x_s)'' \ x_J''\end{pmatrix}\times$$

$$\times\Big(X_I.U_t \bigotimes V_t.D(X_s).X_J + (-1)^{u_t''v_t''+a-b+1} X_I.V_t \bigotimes U_t.D(X_s).X_J\Big)$$

$$+ (-1)^{(a-b)(x_I''+u_t''+x_s''+1)}\varepsilon\begin{pmatrix} x_1''\dots x_t''\dots D(x_s)''\dots x_n'' \\ x_I'' \ D(x_s)'' \ x_t'' \ x_J''\end{pmatrix}\times$$

$$\times\Big(X_I.D(X_s).U_t \bigotimes V_t.X_J + (-1)^{u_t''v_t''+a-b+1} X_I.D(X_s).V_t \bigotimes U_t.X_J\Big)\Big]$$

$$+ \sum_{\substack{t>s \\ U_t \underline{\otimes} V_t = X_t \\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s,t\}}} (-1)^{\sum_{i<s} x_i''}\Big[(-1)^{(a-b)(x_I''+u_t'')}\varepsilon\begin{pmatrix} x_1''\dots D(x_s)''\dots x_t''\dots x_n'' \\ x_I'' \ x_t'' \ D(x_s)'' \ x_J''\end{pmatrix}\times$$

$$\times\Big(X_I.U_t \bigotimes V_t.D(X_s).X_J + (-1)^{u_t''v_t''+a-b+1} X_I.V_t \bigotimes U_t.D(X_s).X_J\Big)$$

$$+ (-1)^{(a-b)(x_I''+u_t''+x_s''+1)}\varepsilon\begin{pmatrix} x_1''\dots D(x_s)''\dots x_t''\dots x_n'' \\ x_I'' \ D(x_s)'' \ x_t'' \ x_J''\end{pmatrix}\times$$

$$\times\Big(X_I.D(X_s).U_t \bigotimes V_t.X_J + (-1)^{u_t''v_t''+a-b+1} X_I.D(X_s).V_t \bigotimes U_t.X_J\Big)\Big]$$

$$+ \sum_{\substack{1\le s\le n \\ U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}} (-1)^{\sum_{i<s} x_i''}\varepsilon\begin{pmatrix} x_1''\dots D(x_s)''\dots x_n'' \\ x_I'' \ D(x_s)'' \ x_J''\end{pmatrix}\Big[(-1)^{(a-b)(x_I''+u_s''+1)}\times$$

$$\times\Big(X_I.D(U_s) \bigotimes V_s.X_J + (-1)^{(u_s''+1)v_s''+a-b+1} X_I.V_s \bigotimes D(U_s).X_J\Big)$$

$$+ (-1)^{(a-b)(x_I''+u_s'')+u_s}\Big(X_I.U_s \bigotimes D(V_s).X_J$$

$$+ (-1)^{(v_s''+1)u_s''+a-b+1} X_I.D(V_s) \bigotimes U_s.X_J\Big)\Big]$$

$$= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8),$$

où

$$(1)=\pm\Big(X_I.U_t\bigotimes V_t.D(X_s).X_J+(-1)^{u''_tv''_t+a-b+1}X_I.V_t\bigotimes U_t.D(X_s).X_J\Big)$$
$$(2)=\pm\Big(X_I.D(X_s).U_t\bigotimes V_t.X_J+(-1)^{u''_tv''_t+a-b+1}X_I.D(X_s).V_t\bigotimes U_t.X_J\Big)$$
$$(3)=\pm\Big(X_I.U_t\bigotimes V_t.D(X_s).X_J+(-1)^{u''_tv''_t+a-b+1}X_I.V_t\bigotimes U_t.D(X_s).X_J\Big)$$
$$(4)=\pm\Big(X_I.D(X_s).U_t\bigotimes V_t.X_J+(-1)^{u''_tv''_t+a-b+1}X_I.D(X_s).V_t\bigotimes U_t.X_J\Big)$$
$$(5)=\pm X_I.D(U_s)\bigotimes V_s.X_J,\quad (6)=\pm X_I.V_s\bigotimes D(U_s).X_J,$$
$$(7)=\pm X_I.U_s\bigotimes D(V_s).X_J,\quad (8)=\pm X_I.D(V_s)\bigotimes U_s.X_J.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&(m\otimes id)\circ\delta''(X_1\dots X_n)=\\
&\sum_{\substack{t<s\\ U_t\underline{\otimes}V_t=X_t\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s,t\}}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_t\dots x''_s\dots x''_n\\ x''_I\ x''_s\ x''_t\ x''_J\end{pmatrix}(-1)^{(a-b)(x''_I+x''_s+u''_t)}(-1)^{x''_I}\times\\
&\quad\times\Big(X_I.D(X_s).U_t\bigotimes V_t.X_J+(-1)^{u''_tv''_t+a-b+1}X_I.D(X_s).V_t\bigotimes U_t.X_J\Big)\\
&+\sum_{\substack{t>s\\ U_t\underline{\otimes}V_t=X_t\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s,t\}}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_s\dots x''_t\dots x''_n\\ x''_I\ x''_s\ x''_t\ x''_J\end{pmatrix}(-1)^{(a-b)(x''_I+x''_s+u''_t)}(-1)^{x''_I}\times\\
&\quad\times\Big(X_I.D(X_s).U_t\bigotimes V_t.X_J+(-1)^{u''_tv''_t+a-b+1}X_I.D(X_s).V_t\bigotimes U_t.X_J\Big)\\
&+\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_s\dots x''_n\\ x''_I\ x''_s\ x''_J\end{pmatrix}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)}(-1)^{x''_I}X_I.D(U_s)\bigotimes V_s.X_J\\
&+\sum_{\substack{1\leq s\leq n\\ U_s\underline{\otimes}V_s=X_s\\ I\cup J=\{1,\dots,n\}\setminus\{s\}}}\varepsilon\begin{pmatrix}x''_1\dots x''_s\dots x''_n\\ x''_I\ x''_s\ x''_J\end{pmatrix}(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_s)+x''_I+u''_sv''_s+a-b+1}X_I.D(V_s)\bigotimes U_s.X_J\\
&=(I_1)+(I_2)+(I_3)+(I_4)
\end{aligned}$$

et

$$(id \otimes m) \circ \delta''(X_1 \dots X_n) =$$

$$\sum_{\substack{t<s \\ U_t \underline{\otimes} V_t = X_t \\ I \cup J = \{1,\dots,n\} \setminus \{s,t\}}} \varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_t \dots x''_s \dots x''_n \\ x''_I \; x''_t \; x''_s \; x''_J \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_t)} (-1)^{x''_I + u''_t + v''_t} \times$$

$$\times \Big(X_I.U_t \bigotimes V_t.D(X_s).X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a-b+1} X_I.V_t \bigotimes U_t.D(X_s).X_J \Big)$$

$$+ \sum_{\substack{t>s \\ U_t \underline{\otimes} V_t = X_t \\ I \cup J = \{1,\dots,n\} \setminus \{s,t\}}} \varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_s \dots x''_t \dots x''_n \\ x''_I \; x''_t \; x''_s \; x''_J \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_t)} (-1)^{x''_I + u''_t + v''_t} \times$$

$$\times \Big(X_I.U_t \bigotimes V_t.D(X_s).X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a-b+1} X_I.V_t \bigotimes U_t.D(X_s).X_J \Big)$$

$$+ \sum_{\substack{1 \le s \le n \\ U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ I \cup J = \{1,\dots,n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_s \dots x''_n \\ x''_I \; x''_s \; x''_J \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} (-1)^{x''_I + u''_s} X_I.U_s \bigotimes D(V_s).X_J$$

$$+ \sum_{\substack{1 \le s \le n \\ U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ I \cup J = \{1,\dots,n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_s \dots x''_n \\ x''_I \; x''_s \; x''_J \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s) + x''_I + v''_s + u''_s v''_s + a-b+1} X_I.V_s \bigotimes D(U_s).X_J$$

$$= (II_1) + (II_2) + (II_3) + (II_4).$$

On vérifie que les termes $(1), \dots, (8)$ de $\delta'' \circ m(X_1 \dots X_n)$ apparaissent aussi dans $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ à un signe $(-1)^{a-b}$ près.

Par exemple, le terme de (1)

$$X_I.U_t \bigotimes V_t.D(X_s).X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a-b+1} X_I.V_t \bigotimes U_t.D(X_s).X_J$$

apparaît dans $\delta'' \circ m(X_1 \dots . X_n)$ avec le signe

$$\varepsilon_1 = (-1)^{\sum_{i<s} x''_i} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_t)} \varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_t \dots D(x_s)'' \dots x''_n \\ x''_I \; x''_t \; D(x_s)'' \; x''_J \end{pmatrix}.$$

Or $\varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_t \dots D(x_s)'' \dots x''_n \\ x''_I \; x''_t \; D(x_s)'' \; x''_J \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_t \dots x''_s \dots x''_n \\ x''_I \; x''_t \; x''_s \; x''_J \end{pmatrix} (-1)^{\sum_{\substack{i<s \\ i \in J}} x''_i} (-1)^{\sum_{\substack{i>s \\ i \in I}} x''_i}$,

alors,

$$\varepsilon_1 = (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_t)} \varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_t \dots x''_s \dots x''_n \\ x''_I \; x''_t \; x''_s \; x''_J \end{pmatrix} (-1)^{x''_I + x''_t}.$$

Le même terme apparaît dans $(id \otimes m) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$, et précisément dans (II_1), avec le signe

$$\varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x''_1 \dots x''_t \dots x''_s \dots x''_n \\ x''_I \ x''_t \ x''_s \ x''_J \end{smallmatrix}\right)(-1)^{(a-b)(x''_I+u''_t)}(-1)^{x''_I+u''_t+v''_t} = (-1)^{a-b}\varepsilon_1.$$

Alors, on trouve que $(1) = (-1)^{(a-b)}(II_1)$.

De même, on démontre que $(2) = (-1)^{(a-b)}(I_1), (3) = (-1)^{(a-b)}(II_2)$,

$(4) = (-1)^{(a-b)}(I_2), (5) = (-1)^{(a-b)}(I_3), (6) = (-1)^{(a-b)}(II_4)$,

$(7) = (-1)^{(a-b)}(II_3)$ et $(8) = (-1)^{(a-b)}(I_4)$.

(ii) On a

$$\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n) = \delta''\Big[\sum_{\substack{i<j \\ K=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}}} \varepsilon\left(\begin{smallmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_i \ x''_j x''_J \end{smallmatrix}\right)\ell''_2(X_i, X_j).X_K\Big].$$

Dans $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$ apparaît des termes de la forme

$$(1) : \ell''_2(X_i, X_j).X_K.U_s \bigotimes V_s.X_L,\ (2) : \ell''_2(X_i, X_j).X_K.V_s \bigotimes U_s.X_L,$$
$$(3) : X_K.U_s \bigotimes V_s.\ell''_2(X_i, X_j).X_L,\ (4) : X_K.V_s \bigotimes U_s.\ell''_2(X_i, X_j).X_L,$$

pour $K \cup L \cup \{i, j, s\} = \{1, \dots, n\}$, $i < j$ et $X_s = U_s \underline{\otimes} V_s$.
Et d'autres termes dans le cas où on coupe $\ell''_2(X_i, X_j)$ par δ'' de la forme

$$(5) : X_K.U_{ij} \bigotimes V_{ij}.X_L,\ (6) : X_K.V_{ij} \bigotimes U_{ij}.X_L,$$

pour $K \cup L \cup \{i, j\} = \{1, \dots, n\}$, $i < j$ et $\ell''_2(X_i, X_j) = U_{ij} \underline{\otimes} V_{ij}$.

De plus, en écrivant le premier membre de **(ii)**, on a d'une part,

$$
\begin{aligned}
&(\ell'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n) = \\
&\sum_{i<j} \sum_{\substack{s \\ K\cup L=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j,s\}}} \sum_{\substack{U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_i\ x''_j\ x''_K\ x''_s\ x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_i+x''_j+x''_K+u''_s)} \times \\
&(\ell'' \otimes id)\big(X_i.X_j.X_K.U_s \bigotimes V_s.X_L + (-1)^{u''_s v''_s+a-b+1} X_i.X_j.X_K.V_s \bigotimes U_s.X_L\big) \\
&= \sum_{i<j} \sum_{\substack{s \\ K\cup L=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j,s\}}} \sum_{\substack{U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_i\ x''_j\ x''_K\ x''_s\ x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_i+x''_j+x''_K+u''_s)} \times \\
&\big(\ell''_2(X_i, X_j).X_K.U_s \bigotimes V_s.X_L + (-1)^{u''_s v''_s+a-b+1} \ell''_2(X_i, X_j).X_K.V_s \bigotimes U_s.X_L\big) \\
&+ \sum_{\substack{i<j \\ K\cup L=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}}} \sum_{\substack{U_j \underline{\otimes} V_j = X_j \\ U_j, V_j \neq \emptyset}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K\ x''_i\ x''_j\ x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_K+x''_i+u''_j)+x''_K} \times \\
&\quad \times \big(X_K.\ell''_2(X_i, U_j) \bigotimes V_j.X_L + (-1)^{u''_j v''_j+a-b+1} X_K.\ell''_2(X_i, V_j) \bigotimes U_j.X_L\big) \\
&+ \sum_{\substack{i<j \\ K\cup L=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}}} \sum_{\substack{U_i \underline{\otimes} V_i = X_i \\ U_i, V_i \neq \emptyset}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K\ x''_j\ x''_i\ x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_K+x''_j+u''_i)+x''_K} \times \\
&\quad \times \big(X_K.\ell''_2(X_j, U_i) \bigotimes V_i.X_L + (-1)^{u''_i v''_i+a-b+1} X_K.\ell''_2(X_j, V_i) \bigotimes U_i.X_L\big) \\
&= (I_1) + (I_2) + (I_3) + (I_4) + (I_5) + (I_6).
\end{aligned}
$$

Et d'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
&(id \otimes \ell'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n) = \\
&\sum_{i<j} \sum_{\substack{s \\ K\cup L=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j,s\}}} \sum_{\substack{U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K\ x''_s\ x''_i\ x''_j\ x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_K+u''_s)} \times \\
&(id \otimes \ell'')\big(X_K.U_s \bigotimes V_s.X_i.X_j.X_L + (-1)^{u''_s v''_s+a-b+1} X_K.V_s \bigotimes U_s.X_i.X_j.X_L\big) \\
&= \sum_{\substack{i<j \\ s \\ K\cup L=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j,s\}}} \sum_{\substack{U_s \underline{\otimes} V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K\ x''_s\ x''_i\ x''_j\ x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_K+u''_s)+x''_K+u''_s+v''_s} \times
\end{aligned}
$$

$$(X_K.U_s \bigotimes V_s.\ell''_2(X_i,X_j).X_L + (-1)^{u''_s v''_s + a-b+1} X_K.V_s \bigotimes U_s.\ell''_2(X_i,X_j).X_L)$$
$$+ \sum_{\substack{i<j \\ K\cup L=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}}} \sum_{\substack{U_i\underline{\otimes} V_i = X_i \\ U_i,V_i\neq\emptyset}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_K\ x''_i\ x''_j\ x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_K+u''_i)+x''_K} \times$$
$$((-1)^{u''_i} X_K.U_i \bigotimes \ell''_2(V_i,X_i).X_L + (-1)^{u''_i v''_i + a-b+1+v''_i} X_K.V_i \bigotimes \ell''_2(U_i,X_j).X_L)$$
$$+ \sum_{\substack{i<j \\ K\cup L=\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}}} \sum_{\substack{U_j\underline{\otimes} V_j = X_j \\ U_j,V_j\neq\emptyset}} \varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_K\ x''_j\ x''_i\ x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_K+u''_j)+x''_K} \times$$
$$((-1)^{u''_j} X_K.U_j \bigotimes \ell''_2(V_j,X_i).X_L + (-1)^{u''_j v''_j + a-b+1+v''_j} X_K.V_j \bigotimes \ell''_2(U_j,X_i).X_L)$$
$$= (II_1) + (II_2) + (II_3) + (II_4) + (II_5) + (II_6).$$

Examinons les termes de $\delta''\circ\ell''(X_1\dots X_n)$ et cherchons les termes correspondants dans le premier membre.

- Dans $\delta''\circ\ell''(X_1\dots X_n)$, le terme (1) : $\ell''_2(X_i,X_j).X_K.U_s\bigotimes V_s.X_L$ apparaît avec le signe

$$\varepsilon_1 = (-1)^{(a-b)(x''_i+x''_j+1+x''_K+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_i\ x''_j x''_K x''_s x''_L \end{pmatrix}.$$

Il correspond au terme (I_1) de $(\ell''\otimes id)\circ\delta''(X_1.\dots.X_n)$ qui apparaît avec le signe

$$\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_i\ x''_j\ x''_K\ x''_s\ x''_L \end{pmatrix}(-1)^{(a-b)(x''_i+x''_j+x''_K+u''_s)} = (-1)^{a-b}\varepsilon_1.$$

- Dans $\delta''\circ\ell''(X_1\dots X_n)$, le terme (2) : $\ell''_2(X_i,X_j).X_K.V_s\bigotimes U_s.X_L$ apparaît avec le signe

$$\varepsilon_2 = (-1)^{(a-b)(x''_i+x''_j+1+x''_K+u''_s)}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_i\ x''_j x''_K x''_s x''_L \end{pmatrix}(-1)^{u''_s v''_s+a-b+1}.$$

Il correspond au terme (I_2) de $(\ell''\otimes id)\circ\delta''(X_1\dots X_n)$ qui apparaît avec le signe

$$\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_i\ x''_j\ x''_K\ x''_s\ x''_L \end{pmatrix}(-1)^{(a-b)(x''_i+x''_j+x''_K+u''_s)}(-1)^{u''_s v''_s+a-b+1} = (-1)^{a-b}\varepsilon_2.$$

- Dans $\delta''\circ\ell''(X_1\dots X_n)$, le terme (3) : $X_K.U_s\bigotimes V_s.\ell''_2(X_i,X_j).X_L$ apparaît avec le signe

$$\varepsilon_3 = (-1)^{(a-b)(x''_K+u''_s)}(-1)^{x''_s+x''_K}\varepsilon\begin{pmatrix} x''_1\dots x''_n \\ x''_K\ x''_s\ x''_i\ x''_j x''_L \end{pmatrix}.$$

Il correspond au terme (II_1) de $(id \otimes \ell'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ qui apparaît avec le signe

$$\varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K \; x''_s \; x''_i \; x''_j \; x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_K + u''_s)} (-1)^{x''_K + u''_s + v''_s} = (-1)^{a-b} \varepsilon_3.$$

- Dans $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$, le terme (4) : $X_K.V_s \bigotimes U_s.\ell''_2(X_i, X_j).X_L$ apparaît avec le signe

$$\varepsilon_4 = (-1)^{(a-b)(x''_K + u''_s)} (-1)^{x''_s + x''_K} \varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K \; x''_s \; x''_i \; x''_j x''_L \end{pmatrix} (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1}.$$

Il correspond au terme (II_2) de $(id \otimes \ell'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ qui apparaît avec le signe

$$\varepsilon \begin{pmatrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K \; x''_s \; x''_i \; x''_j \; x''_L \end{pmatrix} (-1)^{(a-b)(x''_K + u''_s) + x''_K + u''_s + v''_s + u''_s v''_s + a - b + 1} = (-1)^{a-b} \varepsilon_4.$$

Le cas où on coupe $\ell''_2(X_i, X_j)$ par δ'' correspond aux termes (5) et (6) de $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$, $(I_3), (I_4), (I_5), (I_6)$ de $(\ell'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ et $(II_3), (II_4), (II_5), (II_6)$ de $(id \otimes \ell'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$.
On pourra voir ce cas comme si on a uniquement deux paquets X et Y. Il suffit de montrer que :

$$(-1)^{a-b} \delta'' \circ \ell''_2(X, Y) = \left(\ell''_2 \otimes id + id \otimes \ell''_2\right) \circ \delta''(X, Y) : \tag{4.2}$$

Mais, le crochet et le cocrochet ℓ''_2 et δ'' étaient ℓ_2 et δ sur $\mathcal{H}$. Ils vérifient une relation de compatibilité donnée par :

$$\delta \circ \ell_2 = \Big((\ell_2 \otimes id) \circ \big(\tau_{23} \circ (\delta \otimes id) + id \otimes \delta\big) + (id \otimes \ell_2) \circ \big(\delta \otimes id + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta)\big) \Big).$$

En décalant $\mathcal{H}$ par $a - b$ et en écrivant ℓ''_2 et δ'' sur $S^+(\mathcal{H}[a-b])$, la symétrisation de la relation précédente donne (4.2). Ceci achève la démonstration. $\square$

La proposition précédente nous montre que $Q = \ell'' + m$ est une codérivation de $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ pour δ'' de degré 1.
Alors, le complexe $\left(S^+(\mathcal{H}[a-b]), \delta'', Q\right)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle graduée, donc, c'est aussi une C_∞ algèbre.

Enfin, le cocrochet δ'' et le coproduit Δ vérifient l'identité de coLeibniz :

$$(id \otimes \Delta) \circ \delta'' = (\delta'' \otimes id) \circ \Delta + \tau''_{12} \circ (id \otimes \delta'') \circ \Delta.$$

Alors, $\Big(S^+\Big(\mathcal{H}[a-b]\Big), \Delta, \delta'', Q\Big)$ est une bicogèbre codifférentielle graduée.

Définition 4.6.
- Une (a,b)-algèbre à homotopie près sur un espace vectoriel gradué V est définie par la donnée d'une codifférentielle Q, de degré 1 et de carré nul sur la bicogèbre $\left(S^+\left(\left(\underline{\bigotimes}^+ V[-a+1]\right)[a-b]\right), \Delta, \delta''\right)$.
- Soit $\mathcal{A}$ est une (a,b)-algèbre différentielle. Alors, la bicogèbre colibre et codifférentielle

$$\left(\mathcal{U}_{(a,b)-alg}(\mathcal{A}) = S^+\left(\left(\underline{\bigotimes}^+ \mathcal{A}[-a+1]\right)[a-b]\right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m\right)$$

est la (a,b)-algèbre à homotopie près enveloppante de $\mathcal{A}$.

Remarque 4.7.
- Dans le cas où $a=0$, $b=-1$ et $\mathcal{A}$ est une algèbre de Gerstenhaber différentielle, on retrouve l'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près enveloppante de $\mathcal{A}$:

$$\left(S^+\left((\underline{\bigotimes}^+ \mathcal{A}[1])[1]\right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m\right).$$

- Dans le cas où $a=b=0$ et $\mathcal{A}$ est une algèbre de Poisson différentielle grduée, on retrouve le complexe de l'algèbre de Poisson à homotopie près enveloppante de $\mathcal{A}$:

$$\left(S^+\left(\underline{\bigotimes}^+ \mathcal{A}[1]\right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m\right).$$

On conclut que notre construction généralise celle des algèbres de Gerstenhaber et de Poisson à homotopie près.

5. **Les** $(n+1)$**-algèbres**

Soit $(\mathcal{A}, \boldsymbol{.}, [\ ,\ ])$ une (a,b)-algèbre. Par définition, $(\mathcal{A}[-a], \boldsymbol{.})$ est une algèbre commutative et associative graduée et $(\mathcal{A}[-b], [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie graduée telles que la multiplication $\boldsymbol{.}$ et le crochet $[\ ,\ ]$ vérifient l'identité de Leibniz graduée :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}, \qquad [\alpha, \beta \boldsymbol{.} \gamma] = [\alpha, \beta] \boldsymbol{.} \gamma + (-1)^{(|\beta|+a)(|\alpha|+b)} \beta \boldsymbol{.} [\alpha, \gamma].$$

* Sur $\mathcal{A}[-a]$, on considère le degré :

$$deg(\alpha) = |\alpha| + a,$$

Il est clair, alors, que

$$\alpha.\beta = (-1)^{deg(\alpha)deg(\beta)}\beta.\alpha, \quad \alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma \ \text{ et } \ deg(.) = 0.$$

Si on pose $\mathcal{B} = \mathcal{A}[-a]$, $(\mathcal{B}, .)$ est une algèbre associative, commutative et deg-graduée.

* Sur $\mathcal{A}[-b]$, on considère le degré :

$$degré(\alpha) = |\alpha| + b,$$

Il est clair, aussi, que

$$\begin{aligned}&[\alpha,\beta] = -(-1)^{degré(\alpha)degré(\beta)}[\beta,\alpha], \ degré([\ ,\ ]) = 0\\ &\text{et } (-1)^{degré(\alpha)degré(\gamma)}[[\alpha,\beta],\gamma] + (-1)^{degré(\beta)degré(\alpha)}[[\beta,\gamma],\alpha]\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + (-1)^{degré(\gamma)degré(\beta)}[[\gamma,\alpha],\beta] = 0.\end{aligned}$$

On a ici procédé à un décalage de graduation. En fait, on a : $\mathcal{A}[-b] = (\mathcal{A}[-a])[a-b] = \mathcal{B}[a-b]$. Alors sur $\mathcal{B}$, le crochet devient de degré $b-a$ $\Big(deg([\ ,\ ]) = b-a\Big)$. De plus, on sait que l'espace $\mathcal{B}[a-b] = \mathcal{A}[-b]$ muni du crochet $[\ ,\ ]$ est une algèbre de Lie graduée telle que

$$[\alpha,\beta.\gamma] = [\alpha,\beta].\gamma + (-1)^{deg(\beta)\big(deg(\alpha)+b-a\big)}\beta.[\alpha,\gamma].$$

On en déduit que $\Big(\mathcal{B}, ., [\ ,\ ]\Big)$ est une $(0, b-a)$-algèbre.

Alors, via le morphisme $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[-a]$, toute (a,b)-algèbre est isomorphe à une $(0,b-a)$-algèbre. Et vu les résultas démontrés dans la quatrième section, on pourra même dire :

Proposition 5.1. *Toute (a,b)-algèbre à homotopie près est isomorphe à une $(0,b-a)$-algèbre à homotopie près.*

Les $(0,n)$-algèbres, aussi appelées les $(n+1)$-algèbres, sont en fait des algèbres sur l'homologie de l'opérade des petits disques de dimension $n+1$. Ces structures ont été développées dans les années 70 par des topologues algèbristes [20], [21], [6], [9] pour étudier le type d'homotopie des espaces de lacets $(n+1)$-itérés $\Omega^{n+1}(X)$, $n \geq 0$: espace des applications continues entre les espaces topologiques pointés $(S^{n+1}, \text{point de base})$ et (X,x).

La complexité de la structure des espaces de lacets itérés a conduit à l'introduction de la théorie des opérades qui maintenant intervient dans différents domaines. Au lieu de déduire un type d'algèbre par ses générateurs (les opérations) et ses relations (les identités fondamentales), on se donne toutes les opérations que l'on peut faire sur un nombre fini de variables et toutes les relations entre ces opérations : c'est à dire, on définit une opérade. Le principal intérêt en physique mathématique est de pouvoir étudier les structures à homotopie près A_∞, C_∞, L_∞, G_∞, $P_\infty \dots$

L'opérade $\mathcal{D}_{n+1}$ des petits disques de dimension $n+1$ est une collection d'espaces de configuration de $n+1$ petits disques disjoints à l'intérieur du disque unité du plan avec le choix d'un point de base tel que $\mathcal{D}_{n+1}(1) =$ point (voir [6], [21]). Cette opérade est assez intéressante dans les langages homotopiques. Par ailleur, les topologues utilisent un modèle légèrement différent, c'est celui de l'opérade des petits cubes. Cette opérade ne diffère pas de celle des petits disques puisque le disque et le cube sont homotopiquement équivalents. Dans la suite, on utilisera l'opérade des petits disques.

Cohen [9] observe que l'opérade des petits disques de dimension $n+1$ agit sur l'espace des lacets $(n+1)$-fois itérés. Il montre que l'homologie $H_\bullet\Big(\Omega^{n+1}(X[-n-1]), \mathbb{K}\Big)$ de l'opérade des petits disques de dimension $n+1$, $n \geq 1$, sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0 est une opérade différentielle graduée pour la différentielle nulle. Il démontre qu'il existe un morphisme naturel $\lambda_n : H_pX \otimes H_qX \longrightarrow H_{p+q+n}X$ respectant la structure des espaces définis sur l'opérade des petits disques de dimension $n+1$. Ce morphisme vérifie en particulier :

$$\textbf{(i)}\lambda_n(x,y) = (-1)^{pq+1+n(p+q+1)}\lambda_n(y,x), \forall x \in H_pX \text{ et } y \in H_qX.$$

$$\begin{aligned}\textbf{(ii)}&(-1)^{(p+n)(r+n)}\lambda_n(x,\lambda_n(y,x)) + (-1)^{(q+n)(p+n)}\lambda_n(y,\lambda_n(z,x)) \\ &+ (-1)^{(r+n)(q+n)}\lambda_n(z,\lambda_n(x,y)) = 0,\ \forall x \in H_pX, y \in H_qX \text{ et } z \in H_rX.\end{aligned}$$

Le morphisme λ_n est l'analogue d'un crochet de degré n d'une algèbre de Lie graduée.

Une $(n+1)$-algèbre est alors une algèbre sur l'homologie de l'opérade des petits disques de dimension $n+1$, c'est à dire, une $H_\bullet\Big(\mathcal{D}_{n+1}, \mathbb{K}\Big)$-algèbre (voir [10]).

Aurement dit,

Proposition 5.2. *(*[16]*) Une $(n+1)$-algèbre ou une algèbre sur l'homologie des petits disques $H_\bullet\Big(\mathcal{D}_{n+1}, \mathbb{K}\Big)$ est :*
(1) une algèbre associative différentielle graduée si $n = 0$.

(2) une algèbre de Gerstenhaber différentielle graduée munie d'un produit de degré 0 *et d'un crochet de Lie de degré* $-n$*, si* n *est pair et* $n \geq 2$*.*
(3) une algèbre de Poisson différentielle graduée munie d'un produit de degré 0 *et d'un crochet de Lie de degré* $-n$*, si* n *est impair et* $n \geq 1$*.*

Dans (2) *et* (3)*, le crochet de Lie et le produit vérifient l'identité de Leibniz graduée.*

Comme cas particuliers, l'opérade Ass décrivant les algèbres associatives est équivalent à l'homologie de l'opérade $\mathcal{D}_1$ des petits disques de dimension 1. Donc, une algèbre associative est une 1-algèbre.

Aussi, l'opérade $Gers$ décrivant les algèbres de Gerstenhaber est équivalent à l'homologie de l'opérade $\mathcal{D}_2$ des petits disques de dimension 2. Donc, une algèbre de Gerstenhaber est une 2-algèbre.

Corollaire 5.3. *Les* $(0, n)$*-algèbres, ou les* $(n+1)$*-algèbres, correspondent aux algèbres sur l'homologie* $H_\bullet\Big(\mathcal{D}_{n+1}, \mathbb{K}\Big)$ *de l'opérade des petits disques de dimension* $n+1$*.*

La structure des $(n+1)$-algèbres est assez intéressante en topologie algèbrique. La connaissance précise d'une $H_\bullet\Big(\mathcal{D}_{n+1}, \mathbb{K}\Big)$-algèbre permettra de déterminer le type d'homotopie des espaces de lacets $(n+1)$-fois itérés d'un espace pointé (X, x).

On peut, sur cet aspect, voir les résultats de ([13], [16], [10], [12]).

6. Exemples

6.1. Exemple 1

On considère l'espace vectoriel $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des multichamps de vecteurs totalement antisymétrique sur $\mathbb{R}^d$. Cet espace muni du crochet de Schouten $[\ ,\ ]_S$, du produit extérieur $\wedge$ et de la graduation degré$(\alpha) = k$, si α est un k-tenseur, est bien sûr une algèbre de Gerstenhaber.

On appelle E le sous espace vectoriel de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ engendré par les tenseurs

$$\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha^{i_1 \dots i_k}(x) \partial x_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x_{i_k},$$

où $\alpha^{i_1, \dots, i_k}(x)$ est un polynôme homogène de degré m.

On peut munir E de la graduation : $|\alpha| = 2m + k$, si α est un k-tenseur et $\alpha^{i_1 \dots i_k}(x)$ est un polynôme homogène de degré m.

En fait, l'espace E est stable par le produit extérieur $\wedge$ et par le crochet de Schouten $[\ ,\ ]_S$. Si on considère deux tenseurs α et β de E de degré respectivement $|\alpha| = 2m + k$ et $|\beta| = 2n + \ell$. Alors, on a pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in E$,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha \quad \text{et} \quad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

Le produit extérieur $\wedge$ est alors un produit commutatif et associatif gradué de E. Il est de degré 0 puisque $|\alpha \wedge \beta| = 2(n + m) + (k + \ell) = |\alpha| + |\beta|$.

On obtient que $(E, \wedge)$ est une algèbre commutative et associative graduée.

D'autre part, le crochet de Schouten est de degré -3 dans E puisque $|[\alpha, \beta]_S| = 2(n + m - 1) + (k + \ell - 1) = |\alpha| + |\beta| - 3$.

On considère, alors, l'espace $E[3]$ et la graduation

$$deg(\alpha) = |\alpha| - 3 = 2m + k - 3.$$

Sur $E[3]$, le crochet de Schouten sera de degré 0 et vérifie :

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta]_S &= -(-1)^{deg(\alpha)deg(\beta)} [\beta, \alpha]_S \\ \text{et} \quad (-1)^{deg(\alpha)deg(\gamma)} \big[[\alpha, \beta]_S, \gamma\big]_S &+ (-1)^{deg(\beta)deg(\alpha)} \big[[\beta, \gamma]_S, \alpha\big]_S \\ &+ (-1)^{deg(\gamma)deg(\beta)} \big[[\gamma, \alpha]_S, \beta\big]_S = 0. \end{aligned}$$

Alors, $(E[3], [\ ,\ ]_S)$ est une algèbre de Lie graduée. De plus, le crochet $[\ ,\ ]_S$ et le produit $\wedge$ vérifient l'identité de Leibniz donnée par :

$$[\alpha, \beta \wedge \gamma]_S = [\alpha, \beta]_S \wedge \gamma + (-1)^{|\beta|(|\alpha| - 3)} \beta \wedge [\alpha, \gamma]_S.$$

Donc, $(E, [\ ,\ ]_S, \wedge)$ est une $(0, -3)$-algèbre.

Enfin, si on munit E de la différentielle nulle $d = 0$, on obtient que $(E, [\ ,\ ]_S, \wedge, 0)$ est une $(0, -3)$-algèbre différentielle et on sait construire l'algèbre à homotopie près associée à E.

6.2. **Exemple 2**

On considère $S(\mathbb{R}^d)$ l'algèbre symétrique de $\mathbb{R}^d$. Un élément homogène f de $S(\mathbb{R}^d)$ est un polynôme homogène de degré k. On munit $S(\mathbb{R}^d)$ de la graduation :

$$|f| = 2k, \text{ si } f \text{ est un polynôme de degré } k.$$

Sur $S(\mathbb{R}^d)$, on considère la multiplication usuelle $\boldsymbol{.}$ des polynômes. Elle vérifie pour tout $f, g, h \in S(\mathbb{R}^d)$:

$$f\boldsymbol{.}g = (-1)^{|f||g|}g\boldsymbol{.}f \quad \text{et} \quad f\boldsymbol{.}(g\boldsymbol{.}h) \quad = (f\boldsymbol{.}g)\boldsymbol{.}h.$$

La multiplication $\boldsymbol{.}$ est une opération de degré 0 sur $S(\mathbb{R}^d)$ puisque

$$|f\boldsymbol{.}g| = 2(k+\ell) = |f| + |g|.$$

D'autre part, on munit $S(\mathbb{R}^d)$ d'un crochet de Poisson défini par :

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \alpha^{i,j}(x)\ \partial_{x_i}(f).\partial_{x_j}(g),$$

où pour tout i, j, les coefficients $\alpha^{i,j}(x)$ est un polynôme homogène de degré m.

Ce crochet est de degré $2m-4$ puisque

$$|\{f, g\}| = 2(m+k-1+\ell-1) = |f| + |g| + 2m - 4.$$

On considère, alors, l'espace $S(\mathbb{R}^d)[-2m+4]$ et la graduation

$$deg(f) = |f| + 2m - 4.$$

Sur $S(\mathbb{R}^d)[-2m+4]$, le crochet de Poisson sera de degré 0 et vérifie :

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -(-1)^{deg(f)deg(g)}\{g, f\} \\ \text{et} \quad (-1)^{deg(f)deg(\gamma)}\{\{f, g\}, \gamma\} &+ (-1)^{deg(g)deg(f)}\{\{g, \gamma\}, f\} \\ &+ (-1)^{deg(\gamma)deg(g)}\{\{\gamma, f\}, g\} = 0. \end{aligned}$$

Alors, $\Big(S(\mathbb{R}^d)[-2m+4], \{\ ,\ \}\Big)$ est une algèbre de Lie graduée. De plus, le crochet $\{\ ,\ \}$ et le produit $\boldsymbol{.}$ vérifient l'identité de Leibniz donnée par :

$$\{f, g\boldsymbol{.}h\} = \{f, g\}\boldsymbol{.}h + (-1)^{|g|(|f|+2m-4)}g\boldsymbol{.}\{f, h\}.$$

Donc, $\Big(S(\mathbb{R}^d), \{\ ,\ \}, \boldsymbol{.}\Big)$ est une $(0, 2m-4)$-algèbre.

Enfin, si on munit $S(\mathbb{R}^d)$ de la différentielle nulle $d = 0$, on obtient que $\Big(S(\mathbb{R}^d), \{\ ,\ \}, \boldsymbol{.}, 0\Big)$ est une $(0, 2m-4)$-algèbre différentielle et on sait construire l'algèbre à homotopie près associée à $S(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 6.1.

Dans ces deux derniers exemples, pour tenir compte du degré des fonctions polynômes, on a muni les fonctions linéaires $x \longmapsto x_i$ sur $\mathbb{R}^d$ du degré 2. En effet, puisqu'on veut que $\wedge$ restreint à $S(\mathbb{R}^d) \subset E$ ou $\boldsymbol{.}$ sur $S(\mathbb{R}^d)$ soit la multiplication usuelle et puisque $x_i x_j = x_j x_i$, pour tout i, j, on doit donner à ces variables un degré pair.

On veut généraliser, maintenant, ces exemples à un super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$ pour lequel $S(\mathbb{R}^{p|q}) \simeq S(\mathbb{R}^p) \bigotimes \bigwedge(\mathbb{R}^q)$ admet une base notée

$$(x_{i_1} \dots x_{i_k} \xi_{j_1} \dots \xi_{j_r}) \text{ avec } i_1 \leq \dots \leq i_k \text{ et } j_1 < \dots < j_r.$$

6.3. **Exemple 3 : Crochet de Schouten sur le super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$**

On reprend l'article [3] dans le cas d'un super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_p|\xi_1, \dots, \xi_q)$. Les variables x_i commutent donc elles sont de degré pair. On pose

$$d^\circ x_i = 2.$$

Les variables ξ_j anticommutent donc elles sont de degré impair. On pose

$$d^\circ \xi_j = 1.$$

Les champs de veceurs ∂_{x_i} et ∂_{ξ_j} associés sont des dérivations graduées de l'algèbre des polynômes en x_i et ξ_j :

$$S(\mathbb{R}^{p|q}) \simeq S(\mathbb{R}^p) \bigotimes \bigwedge(\mathbb{R}^q)$$

de degré

$$d^\circ \partial_{x_i} = -2 \text{ et } d^\circ \partial_{\xi_j} = -1.$$

Comme dans [3], on modifie ces degrés pour obtenir la graduation naturelle de $T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})$. On va donc poser :

$$|x_i| = 2, \; |\xi_j| = 1, \; |\partial_{x_i}| = -3 \text{ et } |\partial_{\xi_j}| = -2.$$

Le produit extérieur usuel $\wedge_0$ était défini par :

$$\partial_i \wedge_0 \partial_j = \partial_i \otimes \partial_j - (-1)^{d^\circ(\partial_i) d^\circ(\partial_j)} \partial_j \otimes \partial_i,$$

où ∂_i est soit ∂_{x_i} soit ∂_{ξ_i}.

Pour tenir compte du décalage, on pose maintenant

$$\partial_i \wedge \partial_j = (-1)^{|\partial_i|} \partial_i \wedge_0 \partial_j.$$

On complète ce produit exrérieur avec le produit usuel, on aura

$$x_i \wedge x_j = x_i x_j,\ x_i \wedge \xi_j = \xi_j \wedge x_i = \xi_j x_i,\ \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i,$$
$$x_i \wedge \partial_j = x_i \partial_j,\ \xi_i \wedge \partial_j = -\xi_i \partial_j.$$

L'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q}) = \Big(S(\mathbb{R}^p) \bigotimes \bigwedge(\mathbb{R}^q)\Big) \bigotimes \Big(\bigwedge(\mathbb{R}^p)^* \bigotimes S(\mathbb{R}^q)^*\Big)$ est maintenant muni d'un produit $\wedge$ associatif et commutatif gradué, de degré $|\wedge| = 0$.

Un élément $\alpha \in T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})$ sécrit :

$$\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq p \\ 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_m \leq q \\ 1 \leq s_1 < \cdots < s_r \leq p \\ 1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_u \leq q}} \alpha^{i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_m}_{s_1 \ldots s_r t_1 \ldots t_u} x_{s_1} \ldots x_{s_r} \xi_{t_1} \ldots \xi_{t_u} \partial_{x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_{i_n}} \wedge \partial_{\xi_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{\xi_{j_m}},$$

ce qu'on notera simplement par :

$$\alpha = \sum_{S,T,I,J} \alpha^{IJ}_{ST}\ x_S \xi_T \partial_{x_I} \wedge \partial_{\xi_J}.$$

On a $|\alpha| = 2\#S + \#T - 3\#I - 2\#J$.

Sur $T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})$, la multiplication $\wedge$ est définie par :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{S,T,I,J \\ A,B,C,D}} (-1)^{\#B\#I} \alpha^{IJ}_{ST} \beta^{CD}_{AB}\ x_S x_A \xi_T \xi_B \partial_{x_I} \wedge \partial_{x_C} \wedge \partial_{\xi_J} \wedge \partial_{\xi_D}.$$

D'autre part, les champs de vecteurs $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{p|q})$ de la forme $X = \sum_i \tilde{X}^i(x,\xi)\partial_i$ sur le super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$ ont été étudiés par plusieurs auteurs [5]. Cet espace est muni d'un crochet défini par :

$$[X, Y] = X \circ Y - (-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} Y \circ X.$$

On étend ce crochet au crochet de Schouten des multichamps de vecteurs en posant :

$$[X_1 \wedge \ldots \wedge X_n, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_m] = \sum_{s,t=1}^{n,m} (-1)^{|X_s|(|X_{s+1}|+\cdots+|X_n|)+|Y_t|(|Y_1|+\cdots+|Y_{t-1}|)}$$
$$\times X_1 \wedge \cdots \widehat{s} \cdots \wedge X_n \wedge [X_s, Y_t] \wedge Y_1 \wedge \cdots \widehat{t} \cdots \wedge Y_m.$$

(Voir par exemple [1], [4], [17], [18]...)

Ceci revient à imposer une relation de Leibniz de la forme :

$$[X, Y\wedge Z] = [X,Y]\wedge Z + (-1)^{|Y|(|X|-1)}Y\wedge[X,Z].$$

En fait le degré naturel sur $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{p|q})$ pour ce crochet est

$$deg(X) = |X| + 1$$

puisque $|[\ ,\ ]| = 1$. On trouve que $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{p|q})$ muni de deg et $[\ ,\ ]$ est une algèbre de Lie graduée.

De même, si on pose

$$deg(X_1\wedge\dots\wedge X_n) = |X_1\wedge\dots\wedge X_n| + 1,$$

alors, $\Big(T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})[-1], [\ ,\ ]_S\Big)$ est une algèbre de Lie graduée (pour deg).

On peut, comme dans [3], réécrire ces opérations ainsi :

Pour deux champs de vecteurs $X = \sum_i \tilde{X}^i(x,\xi)\partial_i$ et $Y = \sum_j \tilde{Y}^j(x,\xi)\partial_j$, on a :

$$[X,Y] = \\ \sum_{i,j}\tilde{X}^i(x,\xi)\partial_i(\tilde{Y}^j(x,\xi))\partial_j - (-1)^{deg(X)deg(Y)}\tilde{Y}^j(x,\xi)\partial_j(\tilde{X}^i(x,\xi))\partial_i.$$

Pour deux tenseurs

$$\alpha = \sum_{i_1,\dots,i_n}\tilde{\alpha}^{i_1\dots i_n}(x,\xi)\partial_{i_1}\wedge\dots\wedge\partial_{i_n} = \sum_I \tilde{\alpha}^I(x,\xi)\partial_I$$

et

$$\beta = \sum_{j_1,\dots,j_m}\tilde{\beta}^{j_1\dots j_m}(x,\xi)\partial_{j_1}\wedge\dots\wedge\partial_{j_m} = \sum_J \tilde{\beta}^J(x,\xi)\partial_J,$$

on a :

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta]_S = \sum_{I,J}\Big(\sum_{s=1}^{n}&(-1)^{|\partial_{i_s}|(|\partial_{i_1}|+\dots+|\partial_{i_{s-1}}|)+(|\tilde{\beta}^J|+1)(|\partial_I|-|\partial_{i_s}|)}\times\\ &\times\tilde{\alpha}^I(x,\xi)\partial_{i_s}(\tilde{\beta}^J(x,\xi))\partial_{i_1}\wedge\dots\widehat{s}\dots\wedge\partial_{i_n}\wedge\partial_J\\ -\sum_{t=1}^{m}&(-1)^{|\partial_{j_t}|(|\partial_{j_1}|+\dots+|\partial_{j_{t-1}}|)+(|\tilde{\beta}^J|+|\partial_{j_t}|+1)(|\alpha|+1)}\times\\ &\times\tilde{\beta}^J(x,\xi)\partial_{j_t}(\tilde{\alpha}^I(x,\xi))\partial_I\wedge\partial_{j_1}\wedge\dots\widehat{t}\dots\wedge\partial_{j_m}\Big).\end{aligned}$$

Ce qu'on peut l'écrire comme dans [3] :

$$[\alpha, \beta]_S = (-1)^{|\alpha|+1} \alpha \bullet \beta - (-1)^{|\alpha|(|\beta|+1)} \beta \bullet \alpha,$$

avec

$$\alpha \bullet \beta = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{|\alpha|+1+|\partial_{i_s}|(|\partial_{i_1}|+\cdots+|\partial_{i_{s-1}}|)+(|\tilde{\beta}^J|+1)(|\partial_I|-|\partial_{i_s}|)} \times$$
$$\times\, \tilde{\alpha}^I(x,\xi) \partial_{i_s}(\tilde{\beta}^J(x,\xi)) \partial_{i_1} \wedge \ldots \widehat{s} \cdots \wedge \partial_{i_n} \wedge \partial_J.$$

Finalement, on a une relation de Leibniz de la forme :

$$[\alpha, \beta \wedge \gamma]_S = [\alpha, \beta]_S \wedge \gamma + (-1)^{(deg(\beta)-1)deg(\alpha)} \beta \wedge [\alpha, \gamma]_S.$$

On en déduit que $\Big(T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q}), \wedge, [\ ,\ ]_S, d = 0\Big)$ est une $(0,1)$-algèbre différentielle graduée puisque $\Big(T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q}), \wedge\Big)$ est une algèbre commutative graduée et $\Big(T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})[-1], [\ ,\ ]_S\Big)$ est une algèbre de Lie graduée telle que $\wedge$ et $[\ ,\ ]_S$ vérifie l'identité de Leibniz.

6.4. **Exemple 4 : Crochet de Poisson sur le super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$**

Reprenons le super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$ avec les variables x_i et ξ_j de degrés :

$$|x_i| = 2 \text{ et } |\xi_j| = 1.$$

L'algèbre $S(\mathbb{R}^{p|q}) = S(\mathbb{R}^p) \bigotimes \bigwedge(\mathbb{R}^q)$ devient une algèbre commutative graduée pour ce degré :

$$f.g = (-1)^{|f||g|} g.f.$$

Cette algèbre admet des dérivations graduées ∂_{x_i} et ∂_{ξ_j} avec $|\partial_{x_i}| = -2$ et $|\partial_{\xi_j}| = -1$. Suivant [4], on définit un crochet de Poisson homogène de degré $m \in \mathbb{Z}$ sur $S(\mathbb{R}^{p|q})$ en posant :

$$\{f, g\} = (-1)^{m|f|} \sum_{i,j} (-1)^{|\partial_j|(|f|+|\partial_i|)} \omega^{ij}(x,\xi) \partial_i(f) \partial_j(g),$$

où ω^{ij} est une fonction polynôme. Dire que $\{\ ,\ \}$ est un crochet de Poisson, c'est à dire que $\Big(S(\mathbb{R}^{p|q})[-m], \{\ ,\ \}\Big)$ est une algèbre de Lie graduée. Ceci se traduit par trois conditions sur les ω^{ij} :

(i) : $|\omega^{ij}| + |\partial_i| + |\partial_j| = m,\ \forall i, j,$

(ii) : $\omega^{ij}(x,\xi) = (-1)^{|\partial_i||\partial_j|+m+1}\omega^{ji}(x,\xi),\ \forall i, j,$

(iii) : $\displaystyle\sum_k (-1)^{|\partial_\ell|(m+|\partial_i|)}\omega^{\ell,k}(x,\xi)\partial_k\big(\omega^{ji}(x,\xi)\big) + (-1)^{|\partial_j|(m+|\partial_\ell|)}\times$

$$\times\, \omega^{j,k}(x,\xi)\partial_k\big(\omega^{i\ell}(x,\xi)\big) + (-1)^{|\partial_i|(m+|\partial_j|)}\omega^{i,k}(x,\xi)\partial_k\big(\omega^{\ell j}(x,\xi)\big) = 0.$$

Enfin, la relation de Leibniz est bien vérifiée pour **.** et $\{\ ,\ \}$. Elle s'écrit :

$$\{f, g\mathbin{.}h\} = \{f,g\}\mathbin{.}h + (-1)^{|g|(|f|+m)}g\mathbin{.}\{f,h\}.$$

On obtient, donc, que $\Big(S(\mathbb{R}^{p|q}), \mathbin{.}, \{\ ,\ \}, d = 0\Big)$ est une $(0,m)$-algèbre différentielle graduée.

Remerciements : Ce travail a été effectué dans le cadre de l'accord CMCU 06 S 1502. W. Aloulou remercie l'Université de Bourgogne pour l'accueil dont il a bénéficié au cours de ses séjours.

Références

[1] W. Aloulou, D. Arnal & R. Chatbouri – « Cohomologie de Chevalley des graphes vectoriels », *Pacific J of Math* **229** (2007), no. 2, p. 257–292.

[2] ———, « Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologies de Chevalley-Harrison », *Bulletin des Sciences Mathématiques* **133** (2009), no. 1, p. 1–50.

[3] D. Arnal, D. Manchon & M. Masmoudi – « Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich », *Pacific J of Math* **203** (2002), no. 1, p. 23–66.

[4] J. A. Azcárraga, J. M. Izquierdo, A. M. Perelemov & J. C. Pérez-Bueno – « The $\mathbb{Z}_2$-graded Schouten-Nijenhuis bracket and generalized super-Poisson structures », preprint arXiv :hep-th/9612186v2, 5 Apr 1997.

[5] I. Basdouri & M. B. Ammar – « Cohomology of $\mathfrak{osp}(1|2)$ acting on linear differential operators on the supercircle $S^{1|1}$ », Preprint arXiv :0709.1768v1 [math.RT] 12, Sep 2007.

[6] J. M. Boardman & R. M. Vogt – *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[7] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H. Herbig & S. Waldmann – « Formalité G_∞ adaptée et star-représentations sur des sous variétés coïsotropes », Preprint arXiv :math.QA/0504276 v 1, Apr 2005.

[8] A. S. Cattaneo & G. Felder – « Relative formality theorem and quantisation of coisotropic submanifolds », *Adv. Math.* **208** (2007), no. 2, p. 521–548.

[9] F. Cohen – « Homology of $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ and $C_{n+1}X$, $n > 0$ », *Bull. Amer. Math. Soc.* **79** (1973), no. 6, p. 1236–1241.

[10] R. L. Cohen & A. A. Voronov – « Notes on string topology, string topology and cyclic homology », *Adv. courses Math. CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel* (2006), p. 1–95.

[11] B. Fresse – « Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson », *Annales mathématiques Blaise Pascal* **13** (2006), no. 2, p. 237–312.

[12] E. Getzler – « Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories », *Comm. Math. Phys* **159** (1994), no. 2, p. 265–285.

[13] E. Getzler & J. Jones – « Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces », Preprint arXiv :hep-th/9403055, Mar 1994.

[14] G. Ginot – « Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber », *Annales mathématiques Blaise Pascal* **11** (2004), no. 1, p. 95–126.

[15] G. Ginot & G. Halbout – « A formality theorem for Poisson manifolds », *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), p. 37–64.

[16] M. Kontsevich & Y. Soibelman – « Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture », *Conférence Moshé Flato 1999, vol I (Dijon), Math. Phys. Stud., 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht* (2000), p. 255–307.

[17] B. Kupershmidt – « Odd and even Poisson brackets in dynamical systems », *Lett. Math. Phys.* **9** (1985), p. 323–330.

[18] D. A. Leites – « New superalgebras and mechanics », *Sov. Math. Dokl.* **18** (1977), p. 1277–1280.

[19] J. Loday – *Cyclic Homology*, vol. 301, Second Edition Grundlerhren der Mathematischen Wissenschaften A series of comprehensive studies in mathematics Springer-Verlag, 1992.

[20] S. MacLane – *Homology*, vol. 114, Grundlerhren der Mathematischen Wissenschaften Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[21] J. May – *The geometry of iterated loop spaces*, vol. 271, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[22] D. Tamarkin – « Another proof of M. Kontsevich formality theorem », Preprint arXiv :math.QA/9803025 v 4, Sep 1998.

[23] D. Tamarkin & B. Tsygan – « Noncommutative differential calculus, homotopy BV algebras and formality conjectures », *Methods Funct. Anal. Topology* **6** (2000), no. 2, p. 85–100.

Walid Aloulou
Département de mathématiques
Faculté des Sciences de Monastir
Av. de l'environnement 5019 Monastir,
Tunisie.
Institut de Mathématiques de Bourgogne
B.P. 47870 F-21078 Dijon Cedex, France.
Walid.Aloulou@ipeim.rnu.tn