ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

NIKOLAY V. SOLODOV

Cohomologies bivariantes de type cyclique

Volume 12, n°1 (2005), p. 41-78.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2005__12_1_41_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

ANNALES MATHEMATIQUES BLAISE PASCAL **12**, 41-78 (2005)

Cohomologies bivariantes de type cyclique

Nikolay V. Solodov

Résumé

In the article we propose a construction of bivariant cohomology of a couple of chain complexes with periodicities. In this way we obtain definitions of bivariant dihedral and bivariant reflective cohomology of an algebra A. Bivariant cyclic and quaternionic cohomologies appear as particular cases of this construction. The case of 2 invertible in the ground ring is studied particulary.

Dans cet article nous proposons une définition de la cohomologie bivariante pour une paire de complexes de chaînes avec périodicités. De cette manière nous obtenons la notion de cohomologie bivariante diédrale et celle de cohomologie bivariante réflexive d'une algèbre. Les cohomologies bivariantes cyclique et quaternionique apparaissent comme des cas particuliers de cette construction. Le cas où 2 est inversible dans l'anneau de base est détaillé.

Introduction

Soient A et A' deux algèbres unitaires, $\mathcal{B}(A)$ et $\mathcal{B}(A')$ leurs bicomplexes cycliques standards (voir [15]). Dans [8] J. D. Jones et Chr. Kassel définissent la cohomologie cyclique bivariante $HC^*(A, A')$ comme l'homologie du complexe des morphismes gradués $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{B}(A), \mathcal{B}(A'))$ qui commutent avec l'opérateur de périodicité S (voir [15] ou §3.1).

Rappelons que l'on dit que les morphismes des complexes

$$f : (M_*, d) \to (M'_*, d'), \qquad \nabla : (M'_*, d') \to (M_*, d),$$

et l'homotopie h de M_* forment une rétraction par déformation du complexe (M_*, d) vers le complexe (M'_*, d'), si

$$f \circ \nabla = \mathrm{id}_{M'}, \qquad \nabla \circ f = \mathrm{id}_M + dh + hd$$

(voir ci-dessous ou, par exemple, [10]). Nous l'écrivons symboliquement

$$(M'_*, d') \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (M_*, d; h) \tag{0.1}$$

Supposons que (M_*, d) et (M'_*, d') soient des S-complexes, c'est-à-dire qu'ils possèdent des opérateurs de périodicité de type S (voir [8] pour les détails). On dit que la rétraction (0.1) est S-compatible si f, ∇ et h commutent avec les opérateurs de périodicité. Dans [9] il est montré que dans ce cas, pour tout S-complexe L, on a des isomorphismes

$$H_*(\mathrm{Hom}_S(M_*, L_*)) \cong H_*(\mathrm{Hom}_S(M'_*, L_*)),$$

$$H_*(\mathrm{Hom}_S(L_*, M_*)) \cong H_*(\mathrm{Hom}_S(L_*, M'_*)).$$

Dans le même article, Chr. Kassel construit des rétractions par déformation S-compatibles entre les complexes cycliques $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{CC}$ (les notations sont ici celles de [15]). Ceci montre que la cohomologie bivariante cyclique peut être définie indifféremment par

$$\begin{aligned} HC^n(A, A') = H_{-n}(\mathrm{Hom}_S(\mathcal{B}(A), \mathcal{B}(A'))) \cong \\ H_{-n}(\mathrm{Hom}_S(\overline{\mathcal{B}}(A), \overline{\mathcal{B}}(A'))) \cong H_{-n}(\mathrm{Hom}_S(\mathcal{CC}(A), \mathcal{CC}(A'))). \end{aligned} \tag{0.2}$$

Signalons que dans [6] et [7], P. Gurrola développe une théorie analogue pour l'homologie quaternionique.

Notre article s'inscrit en filiation des articles [8], [10] et [7]. Nous proposons une définition générale de la cohomologie bivariante d'un complexe avec périodicités. Les cohomologies bivariante cyclique de [8] ou quaternionique de [6] apparaissent comme des cas particuliers de notre construction. Nous détaillons le cas diédral et réflexif.

Dans le cas où 2 est inversible dans l'anneau de base, ces constructions se simplifient. En particulier, il existe une rétraction par déformation du tricompexe diédral (voir §2.3) vers le bicomplexe cyclique, mais cette rétraction n'est pas S-compatible. Nous ne pouvons donc pas en déduire de définitions analogues à (0.2) pour la cohomologie bivariante diédrale. En effet,

$$HD^*(A, B) \cong HC^*(A, B) \oplus HC^*(A, B)$$

(voir le théorème 3.24 et le corollaire 3.25) ce qui est, grossièrement dit, deux fois plus grand que prévu.

L'étude des morphismes de complexes de type cyclique (diédraux, quaternioniques et réflexifs) nous permet de construire des suites exactes reliant ces homologies bivariantes (voir le théorème 3.26 et le corollaire 3.28).

Décrivons brièvement le contenu du texte.

Dans une première partie, nous fixons les notations, formulons le lemme de perturbation et étudions quelques cas particuliers.

Dans une deuxième partie, nous écrivons d'une manière uniforme les rétractions entre les complexes correspondants pour les homologies de type cyclique: cyclique, quaterniomique, diédrale et réflexive.

Dans une troisième partie nous introduisons la notion de complexes avec périodicités et la notion de cohomologie bivariante d'une paire de tels complexes. Comme cas particuliers nous obtenons les définitions des cohomologies bivariantes diédrale et réflexive. Nous considérons le cas où 2 est inversible dans l'anneau de base et nous construisons les suites exactes longues pour les cohomologies bivariantes de type cyclique.

Ce texte constitue une partie d'un travail effectué à l'Université Lomonosov de Moscou sous la direction du Professeur Yurii Petrovich Soloviev. En septembre 2003 Yu. P. Soloviev est mort subitement et je dédie cette article à sa mémoire.

L'article a été rédigé durant mon séjour à l'Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand). Ce séjour a été financé par le CNRS dans le cadre d'un jumelage franco-russe. Je tiens à remercier le CNRS ainsi que les membres du Département de Mathématiques de l'Université Blaise Pascal particulièrement le Professeur Thierry Lambre pour ce séjour fructueux.

Plan du texte.

1 Lemme de perturbation

Commençons par préciser le langage des “rétractions” que nous utilisons dans la suite.

Définition 1.1: Soit $M = (M_*, d^M)$ et $L = (L_*, d^L)$ deux complexes de chaînes. On dit que les morphismes des complexes f, ∇ et l'homotopie h

$$f : (M_*, d^M) \to (L_*, d^L), \quad \nabla : (L_*, d^L) \to (M_*, d^M), \quad h : M_* \to M_{*+1}$$

définissent une rétraction par déformation si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$f \circ \nabla = \mathrm{id}_L, \qquad \nabla \circ f = \mathrm{id}_M + dh + hd.$$

On l'écrit symboliquement sous la forme suivante

$$(L_*, d^L) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (M_*, d^M; h).$$

Dans cette situation on dit que le complexe (L_*, d^L) est une contraction du complexe (M_*, d^M).

Nous disons que le complexe (M_*, d^M) est contractible, s'il existe une homotopie $h : M_* \to M_{*+1}$, telle que $hd + dh = \mathrm{id}$.

Une rétraction par déformation est dite spéciale si elle satisfait les conditions supplémentaires suivantes

$$h\nabla = 0, \qquad fh = 0, \qquad hh = 0. \tag{1.1}$$

Toute rétraction par déformation peut être modifiée en une rétraction par déformation spéciale. En effet, il suffit de remplacer h par $h(dh + hd)$ pour satisfaire la première condition, par $(dh + hd)h$ pour satisfaire la deuxième et par hdh pour la troisième. Rappelons sans démonstration l'énoncé du *lemme de perturbation* ([5], [10]).

Lemme 1.2: *Soit*

$$(L_*, d^L) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (M_*, d^M; h)$$

une rétraction par déformation spéciale et soit δ un endomorphisme de degré -1 du module gradué M_* tel que

1. $(d^M + \delta)^2 = 0$*;*
2. *pour tout $x \in M$ il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $(\delta h)^m(x) = 0$ (condition de nilpotence locale).*

On pose

$$\sigma = \sum_{i \geq 0} (-\delta h)^i$$

$$\hat{d}^L = d^L + f\sigma\delta\nabla, \quad \hat{h} = h\sigma, \quad \hat{f} = f\sigma, \quad \hat{\nabla} = \nabla - h\sigma\delta\nabla.$$

Alors le diagramme

$$(L, \hat{d}^L) \underset{\hat{\nabla}}{\overset{\hat{f}}{\leftrightarrows}} (M, d^M + \delta; \hat{h})$$

est une rétraction par déformation spéciale.

Remarque 1.3: La condition 2 montre que l'expression σ a toujours un sens.

Soit (X_*, d) un complexe de chaînes, tel que le module gradué X_* admette une décomposition en somme directe $X_* = X'_* \oplus X''_*$. Alors la différentielle d peut être représentée par une matrice

$$d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Citons, toujours sans démonstration, deux énoncés voisins de l'énoncé du lemme de perturbation. Le lemme ci-dessous est analogue au lemme 2.1.6 de [15].

Lemme 1.4: *Avec les notations qui précèdent, on suppose que (X''_*, δ) est un complexe contractible, c'est-à-dire δ satisfait que $\delta^2 = 0$ et que*

$$h :\, X''_* \to X''_{*+1}$$

satisfait $h\delta + \delta h = id$.

Alors les morphismes de complexes ∇ et f définis respectivement par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -h'\gamma \end{pmatrix} \qquad et \qquad (1,\, -\beta h')$$

et l'homotopie $h' = h\delta h$ forment une rétraction par déformation spéciale

$$(X'_*, \alpha - \beta h'\gamma) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (X_*, d; h').$$

Supposons que le module X_* soit muni d'une filtration croissante, bornée inférieurement F_*X, ce qui signifie que

$$0 = F_0X \subset F_1X \subset \ldots \qquad \text{et} \qquad \bigcup_n F_nX = X.$$

Supposons de plus, que la différentielle du complexe $(X_*, d) = (X'_* \oplus X''_*, d)$ soit représentée sous la forme matricielle suivante

$$d = \begin{pmatrix} d_1 + \alpha & 0 \\ \gamma & d_2 + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On suppose que le premier facteur préserve la filtration, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} : \ F_n X \to F_n X$$

et que le second diminue la filtration, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \ F_n X \to F_{n-1} X. \tag{1.2}$$

Le lemme ci-dessous est analogue au lemme 1.3 de [13].

Lemme 1.5: *Avec les notations qui précèdent, on suppose que d_1 et d_2 sont telles que $d_1^2 = d_2^2 = 0$, c'est-à-dire que (X'_*, d_1) et (X''_*, d_2) sont des complexes de chaînes. Supposons que (X''_*, d_2) est contractible d'homotopie contractante h. Alors on a la rétraction par déformation spéciale*

$$(X'_*, d_1 + \alpha) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (X_*, d; \hat{h}),$$

où, en ayant posé

$$\sigma = \sum_{i \geq 0} (-\delta h)^i,$$

les morphismes f, ∇ et l'homotopie $\hat{h}$ sont donnés par les matrices

$$(1,\ 0), \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -h\sigma\gamma \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -h\sigma \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

respectivement.

Remarque 1.6: On peut remplacer la condition (1.2) par la condition plus faible suivante: δ diminue la filtration, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} : \ F_n X \to F_{n-1} X.$$

2 Homologies de type cyclique

2.1 Homologie de Hochschild

Soit A une algèbre unitaire sur l'anneau commutatif k. Dans la suite on note par $A^{\otimes n}$ la n-ième puissance tensorielle de A et par

$$(a_0, a_1, ..., a_n) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes n+1}$$

un monôme de $A^{\otimes n+1}$.

L'homologie de Hochschild $HH_*(A)$ de l'algèbre A est définie comme l'homologie du complexe $(\mathcal{C}_*(A), b)$ avec $\mathcal{C}_n(A) = A^{\otimes n}$ et

$$\begin{aligned} b(a_0, a_1, \cdots, a_n) = & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, \cdots, a_{i-1}, a_i \cdot a_{i+1}, \cdots, a_n) \\ & +(-1)^n (a_n \cdot a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Un monôme $(a_0, a_1, ..., a_n)$ est dit dégénéré s'il existe $i > 0$ tel que $a_i = 1$. Les monômes dégénerés forment un sous-complexe contractible $\mathcal{D}_*(A)$ de $\mathcal{C}_*(A)$, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur d'homotopie

$$h: \quad \mathcal{C}_*(A) \to \mathcal{C}_{*+1}(A),$$

tel que $hb + bh$ est égal à l'identité sur les monômes dégénérés, et $hb + bh$ est nul sur les monômes non-dégénérés (voir [2]).

L'homologie de Hochschild est donc également l'homologie du complexe normalisé $(\overline{\mathcal{C}}_*(A), b)$ avec $\overline{\mathcal{C}}_n(A) = \mathcal{C}_n(A)/\mathcal{D}_n(A) \cong A \otimes (A/k)^{\otimes n}$.

Soit $(\mathrm{Bar}_*(A), b')$ la bar-résolution de A, où $\mathrm{Bar}_n(A) = A^{\otimes (n+2)}$ et

$$b'(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} (a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i \cdot a_{i+1}, \cdots, a_n),$$

alors

$$(\mathcal{C}_*(A), b) = (A \otimes_{A \otimes A^{op}} \mathrm{Bar}_*(A), id \otimes b')$$

et donc $HH_*(A) = \mathrm{Tor}_n^{A \otimes A^{op}}(A, A)$.

De même,

$$(\overline{\mathcal{C}}_*(A), b) = (A \otimes_{A \otimes A^{op}} \overline{\mathrm{Bar}}_*(A), id \otimes b'),$$

où $\overline{\mathrm{Bar}}_n(A) = A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A$.

2.2 Homologie cyclique

Dans la suite, homologie de bi(tri)complexe, signifie homologie du complexe total correspondant.

Définition 2.1: L'homologie cyclique $HC_*(A)$ de l'algèbre A est l'homologie du bicomplexe $\mathcal{CC}(A)$ ci-dessous:

$$\mathcal{CC}(A):\quad \begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d,"b"'] & \vdots \arrow[d,"-b'"'] & \vdots \arrow[d,"b"'] & \vdots \arrow[d,"-b'"'] & \\
A^{\otimes 3} \arrow[d,"b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l,"1-t"'] \arrow[d,"-b'"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l,"N"'] \arrow[d,"b"'] & A^{\otimes 3} \arrow[l,"1-t"'] \arrow[d,"-b'"'] & \cdots \arrow[l,"N"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d,"b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l,"1-t"'] \arrow[d,"-b'"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l,"N"'] \arrow[d,"b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l,"1-t"'] \arrow[d,"-b'"'] & \cdots \arrow[l,"N"'] \\
A & A \arrow[l,"1-t"'] & A \arrow[l,"N"'] & A \arrow[l,"1-t"'] & \cdots . \arrow[l,"N"']
\end{tikzcd}$$

Dans ce bicomplexe les applications t et N sont respectivement définies par

$$t(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \quad \text{et}$$

$$N = 1 + t + t^2 + ... + t^n.$$

Les colonnes paires de $\mathcal{CC}(A)$ sont formées à partir des bar-résolutions augmentées (augmentation $A \otimes A \to A$ est multiplication de A), qui sont contractibles. L'opérateur

$$s(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (1, a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

définit leur homotopie contractante. Afin d'éliminer les parties contractibles évidentes du complexe $\mathcal{CC}(A)$ utilisons le lemme 1.4 pour le complexe $X_* = \mathcal{CC}(A)$ pour lequel les complexes X'_* et X''_* sont respectivement constitués des colonnes impaires et paires de $\mathcal{CC}(A)$. On obtient la déformation par rétraction spéciale

$$(\hat{\mathcal{BC}}(A), b, \hat{B}) \underset{I}{\overset{J}{\leftrightarrows}} (\mathcal{CC}(A); S),$$

où $\hat{\mathcal{BC}}(A)$ est formé à partir des colonnes paires de $\mathcal{CC}(A)$ et

$$\hat{B} = -(1-t)sb'sN = -sN + tsN - (1-t)s^2b'N. \tag{2.2}$$

Les opérateurs I, J et S sont définis à partir de formules du lemme 1.4.

Remarquons que les éléments dégénérés forment dans $\hat{\mathcal{BC}}(A)$ un sous-complexe $D\mathcal{C}(A)$. Vérifions pour cela que $\hat{B}$ envoie éléments dégénérés sur éléments dégénérés. Soit $a = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ un élément dégénéré, alors chaque monôme de $sN(a)$ a au moins deux composantes unitaires. Par conséquent il en est de même pour $sb'sN(a)$. Chaque monôme de $(1-t)sb'sN(a)$ contient donc au moins un coefficient a_i égal à 1, où $i \geq 2$, ce qui montre que chaque monôme de $(1-t)sb'sN(a)$ est dégénéré.

Les colonnes du complexe $D\mathcal{C}(A)$ sont contractibles (voir §2.1). Par conséquent il en est de même pour $D\mathcal{C}(A)$.

En appliquant le lemme 1.5 avec $X_* = \hat{\mathcal{BC}}(A)$, $X''_* = D\mathcal{C}(A)$ et $d_1 = d_2 = b$, on voit que le complexe normalisé $(\mathcal{BC}(A), b, B)$ est une contraction du complexe $\hat{\mathcal{BC}}(A)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] \\
 & A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} \arrow[d, "b"'] & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & A \otimes \overline{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[l, "B"'] \\
\mathcal{BC}(A) : & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \arrow[d, "b"'] & A \otimes \overline{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[l, "B"'] & \\
 & A \otimes \overline{A} \arrow[d, "b"'] & A \arrow[l, "B"'] & & \\
 & A & & &
\end{tikzcd}
$$

Ce complexe $\mathcal{BC}(A)$ est constitué d'éléments non-dégénérés. La différentielle B est la restriction de $\hat{B}$ aux éléments non-dégénérés. Les images des opérateurs ts et s^2 sont toujours dégénérées, donc $B = -sN$ (voir (2.2)) s'écrit

$$B(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = -\sum_{i=0}^{n} (-1)^i 1 \otimes a_i \otimes a_{i+1} \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}.$$

Nous avons démontré

Théorème 2.2: *Le complexe $\mathcal{BC}(A)$ est une contraction du complexe $\mathcal{CC}(A)$.*

2.3 L'homologie diédrale, quaternionique et réflexive

Notons que la n-ième ligne de $\mathcal{CC}(A)$ apparaît comme une résolution du groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ à coefficients dans le $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-module $A^{\otimes n}$ (l'action est donnée par des permutations cycliques des facteurs). Cette construction admet une généralisation: la suite des groupes $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{n\in\mathbf{N}}$ peut être remplacée par d'autres suites de groupes qui agissent naturellement sur $(A^{\otimes n})_{n\in\mathbf{N}}$ (voir [11] ou [3]). Dans la suite nous allons considérer les suites de groupes cycliques $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{n\in\mathbf{N}}$, diédraux $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où

$$D_n =< p, q \mid p^n = q^2 = 1, qpq^{-1} = p^{-1} >,$$

quaternioniques $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où

$$Q_n =< p, q \mid p^n = q^2, qpq^{-1} = p^{-1} >$$

et la suite "réflexive" $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_{n\in\mathbf{N}}$.

Pour bien définir l'action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur $A^{\otimes n}$, présente dans les trois derniers cas, nous exigeons que l'algèbre A soit munie d'un involution, c'est-à-dire d'un antihomomorphisme $^{-} : A \to A$ satisfaisant $\overline{\overline{a}} = a$ et $\overline{a\cdot b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ pour tout a de A. Remarquons que toute algèbre commutative admet l'involution triviale $\overline{a} = a$. L'action du groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur $A^{\otimes n+1}$ est donnée par

$$y_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}(\overline{a}_0, \overline{a}_n, \overline{a}_{n-1}, \dots, \overline{a}_1),$$

où on note y_n le générateur du n-ième groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de la suite $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})_{n\in\mathbf{N}}$, $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Introduisons à présent les définitions précises des homologies diédrale et quaternionique.

Définition 2.3:[12] L'homologie diédrale positive de l'algèbre A est l'homologie du tricomplexe $\mathcal{CD}^+(A)$:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "1-y"'] & \vdots \arrow[d, "-1-yt"'] & \vdots \arrow[d, "1+y"'] & \vdots \arrow[d, "-1+yt"'] & \\
(A^*, b) \arrow[d, "1+y"'] & (A^*, -b') \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-1+yt"'] & (A^*, b) \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "1-y"'] & (A^*, -b') \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-1-yt"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
(A^*, -b) \arrow[d, "1-y"'] & (A^*, b') \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-1-yt"'] & (A^*, -b) \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "1+y"'] & (A^*, b') \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-1+yt"'] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
(A^*, b) & (A^*, -b') \arrow[l, "1-t"'] & (A^*, b) \arrow[l, "N"'] & (A^*, -b') \arrow[l, "1-t"'] & \cdots, \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}$$

où (A^*, b) et (A^*, b') désignent respectivement le complexe de Hochschild $\mathcal{C}_*(A)$ et la bar-résolution augmentée. On note $HD^+_*(A) = H_*(Tot\,\mathcal{CD}^+)$.

Les plans horizontaux de $\mathcal{CD}^+(A)$ sont tous (au signe près) le bicomplexe cyclique $\mathcal{CC}(A)$. Les morphismes "verticaux" y et yt sont les "réflexions" des éléments de $A^{\otimes n}$, ce qui correspond à la présentation de D_n comme produit semi-direct $D_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Le plan de $\mathcal{CD}^+(A)$ formé à partir de $A^{\otimes n}$ constitue une résolution de D_n à coefficients dans $A^{\otimes n}$. Remarquons que les groupes diédraux n'ont pas en général de résolution périodique et il convient de représenter leurs résolutions en forme de bicomplexes.

Si on remplace partout dans $\mathcal{CD}^+(A)$ l'opérateur y par $-y$, on obtient un tricomplexe noté $\mathcal{CD}^-(A)$. L'homologie de $\mathcal{CD}^-(A)$ s'appelle l'homologie diédrale négative de A. On réunit $\mathcal{CD}^+(A)$ et $\mathcal{CD}^-(A)$ dans un tricomplexe

$$\mathcal{CD}(A) = \mathcal{CD}^+(A) \oplus \mathcal{CD}^-(A)$$

appelé le tricomplexe diédral.

Introduisons le bicomplexe suivant, noté $\mathcal{CQ}(A)$

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "-b'\oplus -b"'] & \vdots \arrow[d, "b\oplus b'"'] & \vdots \arrow[d, "-b'"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2}\oplus A^{\otimes 2} \arrow[l, "\theta"'] \arrow[d, "-b'\oplus -b"'] & A^{\otimes 2}\oplus A^{\otimes 2} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "b\oplus b'"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "\phi"'] \arrow[d, "-b'"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N_Q"'] \arrow[d, "b"'] & \cdots \arrow[l, "\theta"'] \\
A & A\oplus A \arrow[l, "\theta"'] & A\oplus A \arrow[l, "\sigma"'] & A \arrow[l, "\phi"'] & A \arrow[l, "N_Q"'] & \cdots . \arrow[l, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

Les colonnes de $\mathcal{CQ}(A)$ se répètent de 4 en 4. Les premières et les quatrièmes colonnes sont formées respectivement à partir du complexe de Hochschild $\mathcal{C}_*(A)$ et à partir de la bar-résolution augmentée $\mathrm{Bar}^+_*(A)$. Les deuxièmes et les troisièmes colonnes sont (au signe de la différentielle près) les sommes directes $\mathcal{C}_*(A)\oplus\mathrm{Bar}^+_*(A)$. Les différentielles horizontales de $\mathcal{CQ}(A)$ se représentent matriciellement par

$$\theta = (1-t, 1-y), \quad \sigma = \begin{pmatrix} N & 1+yt \\ -(1+y) & t-1 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} 1-t \\ yt-1 \end{pmatrix}.$$

Enfin pour $a \in A^{\otimes n}$

$$N_Q(a) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{n} y^i t^j(a) = \sum_{g\in Q_n} g(a).$$

Les lignes de $\mathcal{CQ}(A)$ sont formées à partir des résolutions de groupes quaternioniques Q_n (voir [1], XXII.7) à coefficients dans le Q_n-module $A^{\otimes n}$.

Définition 2.4:[14] L'homologie quaternionique de l'algèbre A est l'homologie du bicomplexe quaternionique $\mathcal{CQ}(A)$. On note $HQ_*(A) = H_*(\mathcal{CQ}(A))$.

Définition 2.5:[12] L'homologie réflexive positive de l'algèbre A est l'homologie du bicomplexe

$$\mathcal{CR}^+(A): \quad \begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \\ A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-y"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1+y"'] \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-y"'] \arrow[d, "b"'] & \cdots \arrow[l, "1+y"'] \\ A & A \arrow[l, "1-y"'] & A \arrow[l, "1+y"'] & A \arrow[l, "1-y"'] & \cdots . \arrow[l, "1+y"'] \end{tikzcd}$$

On la note $HR_*^+(A)$.

L'homologie du complexe $\mathcal{CR}^-(A)$ obtenu en inversant le signe de y s'appelle l'homologie réflective négative. Souvent, on réunit $\mathcal{CR}^+(A)$ et $\mathcal{CR}^-(A)$ dans un bicomplexe

$$\mathcal{CR}(A) = \mathcal{CR}^+(A) \oplus \mathcal{CR}^-(A),$$

appelé le complexe réflexif.

2.4 Le complexe diédral $\mathcal{BD}$

Les complexes $\mathcal{CD}(A)$ et $\mathcal{CQ}(A)$, définissant les homologies diédrale et quaternionique contiennent des colonnes contractibles $\mathrm{Bar}_*^+(A)$. Nous allons les éliminer à l'aide d'une procédure analogue à celle du paragraphe 2.2. Nous commençons par le complexe diédral.

Dans le §2.2 nous avons détaillé la rétraction par déformation spéciale

$$(\hat{\mathcal{BC}}(A), b, \hat{B}) \underset{I}{\overset{J}{\rightleftarrows}} \mathcal{CC}(A); S. \qquad (2.3)$$

Notons $\tilde{s} = sb's$. Les opérateurs

$$I_n \colon \hat{\mathcal{BC}}_n \to \mathcal{CC}_n \qquad J_n \colon \mathcal{CC}_n \to \hat{\mathcal{BC}}_n \quad \text{et} \quad S_n \colon \mathcal{CC}_n \to \mathcal{CC}_{n+1}$$

sont définis par les matrices suivantes. Désignons par $[m]$ la partie entiere de m.
J_n est la matrice à $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ lignes et $n+1$ colonnes ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 1 & (t-1)\tilde{s} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (t-1)\tilde{s} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & u & v \end{pmatrix}$$

avec $u=1$, $v=(t-1)\tilde{s}$ si n est impair et $u=0$, $v=1$ sinon.
I_n est la matrice à $n+1$ lignes et $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{s}N & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{s}N & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u & v \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w & x \end{pmatrix}$$

avec $u=0$, $w=0$, $v=-\tilde{s}N$, $x=1$ si n est pair et $u=1$, $v=0$, $w=0$, $x=-\tilde{s}N$ sinon.
S_n est la matrice à $n+2$ lignes et $n+1$ colonnes

$$S_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & \tilde{s} & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & \tilde{s} & & & \\ & & & 0 & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & u \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $u=0$ si n est paire et $u=\tilde{s}$ sinon. Détaillons les raisonnements pour le complexe $\mathcal{CD}^+(A)$.

Le tricomplexe $\mathcal{CD}^+(A)$ est constitué à partir de bicomplexes plans $\mathcal{CC}(A)$. Notons $\mathcal{CD}^+(A)_{[i]}$ le plan de cote i du tricomplexe $\mathcal{CD}^+(A)$. Le bicomplexe $\mathcal{CD}^+(A)_{[i]}$ est égal au bicomplexe $\mathcal{CC}(A)$. Les différentielles de $\mathcal{CD}^+(A)$ entre les plans $\mathcal{CD}^+(A)_{[i]}$ et $\mathcal{CD}^+(A)_{[i-1]}$ sont construites à partir des applications $1 \pm y$ et $1 \pm yt$. Notons d^+ la différentielle totale du tricomplexe $\mathcal{CD}^+(A)$.

Introduisons un tricomplexe $\mathcal{CD}^\circ(A)$ dont le plan $\mathcal{CD}^\circ(A)_{[i]}$ de cote i est égal au bicomplexe $\mathcal{CC}(A)$ et dont les différentielles entre les plans de cote i et $i-1$ sont toutes nulles. Introduisons un tricomplexe $\mathcal{BD}^\circ(A)$ dont le plan $\mathcal{BD}^\circ(A)_{[i]}$ de cote i est égal au bicomplexe $\hat{\mathcal{BC}}(A)$ et dont les différentielles entre les plans $\mathcal{BC}$ sont également nulles. Par juxtaposition sur chaque plan de cote i de la rétraction (2.3), on obtient une rétraction par déformation spéciale

$$\mathcal{BD}^\circ(A) \underset{I^\circ}{\overset{J^\circ}{\leftrightarrows}} \mathcal{CD}^\circ(A); S^\circ.$$

Les opérateurs

$$I_n^\circ : Tot_n\, \mathcal{BD}^\circ(A) \to Tot_n\, \mathcal{CD}^\circ(A), \qquad J_n^\circ : Tot_n\, \mathcal{CD}^\circ(A) \to Tot_n\, \mathcal{BD}^\circ(A)$$

et $S_n^\circ : Tot_n\, \mathcal{CD}^\circ(A) \to Tot_{n+1}\, \mathcal{CD}^\circ(A)$ sont représentés par les matrices composées des blocs

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 & & & \\ & I_{n-1} & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_n & & & \\ 0 & J_{n-1} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & J_0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S_n & & & \\ 0 & S_{n-1} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & S_0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

respectivement. Les matrices ne sont pas carrées par blocs. Tous les blocs hors de la diagonale principale sont nuls.

La différentielle de $\mathcal{CD}^+(A)$ entre les plans de cote i et $i-1$ peuvent être vues comme une perturbation Δ de la différentielle totale d° de $\mathcal{CD}^\circ(A)$, c'est-à-dire qu'on a

$$\big(Tot\, \mathcal{CD}^+(A), d^+\big) = \big(Tot\, \mathcal{CD}^\circ(A), d^\circ + \Delta\big).$$

La perturbation $\Delta_n \colon \mathcal{CD}^\circ_{n+1}(A) \to \mathcal{CD}^\circ_n(A)$ correspond à la matrice

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 0 & \delta_n & & & \\ & 0 & \delta_{n-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \delta_0 \end{pmatrix},$$

où δ_{2n} et δ_{2n-1} sont des matrices diagonales carrées d'ordre $2n+1$ et $2n$ respectivement, dont les éléments se répètent avec la période 4,

$$\delta_{2n} = \mathrm{diag}\{1-y,\ yt-1,\ 1+y,\ -(yt+1),\ 1-y, \ldots\},$$

$$\delta_{2n-1} = \mathrm{diag}\{1+y,\ -(yt+1),\ 1-y,\ yt-1,\ 1+y, \ldots\}.$$

La rétraction (2.3) est spéciale, il en est de même pour la rétraction ainsi obtenue.

La matrice $S_n^\circ \Delta_n$, carrée et triangulaire supérieure stricte, est nilpotente. La condition de nilpotence locale est donc satisfaite et nous pouvons appliquer le lemme de perturbation (lemme 1.2). Nous obtenons la rétraction par déformation spéciale

$$(\mathcal{BD}^\circ(A), b+\hat{B}, \hat{\Delta}) \underset{\hat{I}}{\overset{\hat{J}}{\rightleftarrows}} (\mathcal{CD}(A)^+, d^+; \hat{S})$$

La perturbation

$$\hat{\Delta}_n : \quad \mathcal{BD}^\circ{}_n \to \mathcal{BD}^\circ{}_{n-1}$$

de la différentielle de $\mathcal{BD}^\circ(A)$ est donnée par la matrice triangulaire par blocs

$$\begin{pmatrix} 0_{n+1} & J_n\delta_n I_n & J_n\delta_n S_{n-1}\delta_{n-1}I_{n-1} & \cdots & & \\ & 0_n & J_{n-1}\delta_{n-1}I_{n-1} & J_{n-1}\delta_{n-1}S_{n-2}\delta_{n-2}I_{n-2} & \cdots & \\ & & 0_{n-1} & J_{n-2}\delta_{n-2}I_{n-2} & \cdots & \\ & & & 0_{n-2} & \ddots & \\ & & & & 0_1 & J_0\delta_0 I_0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

où 0_{n+1} désigne une matrice nulle de type

$$\left(\left[\frac{n+2}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right] \right).$$

La diagonale de la matrice $\hat{\Delta}_n$ qui commence par 0_{n+1} est composée des blocs nuls. Nous appellons la diagonale suivante qui commence par le bloc $J_n\delta_n I_n$ "la première sur-diagonale".

Notons par $D\mathcal{D}^\circ(A)$ le module des éléments dégénérés (voir §2.2) de $\mathcal{BD}^\circ(A)$. Dans le §2.2 nous avons vu que $D\mathcal{D}^\circ(A)$ est stable par b et $\hat{B}$. Pour prouver que $D\mathcal{D}^\circ(A)$ est un sous-complexe de $\mathcal{BD}^\circ(A)$ il nous reste à montrer que $\hat{\Delta}$ envoie éléments dégénérés sur éléments dégénérés. Chaque composante de chaque bloc de la matrice (2.4) est une composition d'opérateurs de permutations N, t, y et de dégénérescence $\tilde{s}$. Donc $\hat{\Delta}$ envoie élément dégénéré sur une composition des monômes contenants au minimum une unité. Chaque bloc de (2.4) est une composition qui commence par $J_n\delta_n$. Il en résulte que les composantes de chaque bloc non nul de la matrice (2.4) sont des sommes de compositions de la forme

$$j \circ q \circ r, \tag{2.5}$$

où j désigne une composante de la matrice J_m, q désigne une composante de la matrice δ_m et r désigne le reste. Il est facile de voir que $r(x)$, où x est un élément dégénéré contient déjà une unité. Les seuls cas possibles pour les compositions élémentaires (2.5) sont les suivants.

- Soit j une composante d'une colonne paire de la matrice J_m (la numérotation des colonnes commence par 1), alors la composition commence par $(1-t)\tilde{s}$ et par conséquent le résultat contient deux unités au minimum, donc il est dégénéré.

- Soit j une composante d'une colonne impaire de la matrice J_m; considérons un bloc de la première sur-diagonale. Alors ce bloc s'écrit comme $J_n\delta_n I_n$. Par conséquent, toute la composition (2.5) est égale à $(1 \pm y)$, qui envoie des éléments dégénérés dans des éléments dégénérés.

- Soit j une composante d'une colonne impaire de la matrice J_m; considérons un bloc d'une sur-diagonale plus haute que la première sur-diagonale. Alors l'opérateur S_n (qui a des composantes impaires nulles) suit δ dans la composition (2.5). Donc le résultat est zéro.

En appliquant le lemme 1.4 nous obtenons la rétraction par déformation

$$(\mathcal{BD}^+(A), b + \hat{B}, \hat{\Delta}) \rightleftarrows (\mathcal{BD}^\circ(A), b + \hat{B}, \hat{\Delta}; \hat{h}),$$

où $\mathcal{BD}^+(A)$ désigne le quotient de $\mathcal{BD}^\circ(A)$ par $D\mathcal{D}^\circ(A)$.

Revenons à la structure explicite de $\hat{\Delta}$. Après la normalisation, toutes les composantes de la matrice (2.4) sauf celles de la première sur-diagonale deviennent nulles. En effet, on a

$$J_n\delta_n S_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & -(1-t)\tilde{s}(1 \pm y)\tilde{s} & 0 & & \\ & & 0 & -(1-t)\tilde{s}(1 \mp y)\tilde{s} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0.$$

Dans ce calcul et avec les notation du lemme 1.4, on a utilisé la relation $h' = h - hd^2$ et les relations $ys = syt$ et $s^2 = 0$. En dehors de la première sur-diagonale, la composition $J_n\delta_n S_{n-1}$ apparaît dans chaque bloc.

La première sur-diagonale est constituée à partir des blocs $J_n \delta_n I_n$. La matrice $J_n \delta_n I_n$ est carrée d'ordre $\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1$ avec les composantes diagonales $(1 \pm y)$. Les autres composantes ont la forme

$$(1-t)\tilde{s}(\pm y - 1)\tilde{s}N = 0.$$

Dans cette dernière égalité nous avons utilisé le fait que $\tilde{s} = s$ et qu'une composition de t, N, y et s qui contient deux fois s est nulle, après normalisation. En conclusion $J_n \delta_n I_n$ est une matrice diagonale

$$J_n \delta_n I_n = \mathrm{diag}\{(1 \pm y), (1 \mp y), (1 \pm y), \ldots\}.$$

Puisque la composition de deux rétractions par déformation est une rétraction par déformation, le complexe

$$\mathcal{BD}^+(A): \qquad (\mathcal{BC}, b, B) \xleftarrow{\tilde{\omega}^+} (\mathcal{BC}, -b, -B) \xleftarrow{\tilde{\omega}^-} (\mathcal{BC}, b, B) \xleftarrow{\tilde{\omega}^+} \cdots$$

est une contraction du complexe $\mathcal{CD}^+(A)$. Les multicomplexes qui ne diffèrent que par des signes des différentielles sont isomorphes (voir [4]); nous pouvons donc changer les signes des différentielles dans les plans $(\mathcal{BC}_{*,*}, -b, -B)$. Pour que le carré de la différentielle du complexe total reste nul, il faut changer aussi les signes des différentielles horizontales. Nous avons prouvé le théorème suivant.

Théorème 2.6: *Le complexe*

$$\mathcal{BD}^+(A): \quad (\mathcal{BC}, b, B) \xleftarrow{\omega^+} (\mathcal{BC}, b, B) \xleftarrow{\omega^-} (\mathcal{BC}, b, B) \xleftarrow{\omega^+} \cdots,$$

est une contraction du complexe $\mathcal{CD}^+(A)$. D'une manière analogue, le complexe

$$\mathcal{BD}^-(A): \quad (\mathcal{BC}, b, B) \xleftarrow{\omega^-} (\mathcal{BC}, b, B) \xleftarrow{\omega^+} (\mathcal{BC}, b, B) \xleftarrow{\omega^-} \cdots.$$

est une contraction du complexe $\mathcal{CD}^-(A)$.

Les différentielles $\omega^+_{i,j}$, $\omega^-_{i,j}$: $\mathcal{BC}_{i,j}(A) \to \mathcal{BC}_{i,j}(A)$, $i \geq$, $j \geq 0$ sont données par

$$\omega^+_{i,j} = (-1)^{i+j}(1 - (-1)^i y) \quad et \quad \omega^-_{i,j} = (-1)^{i+j}(1 + (-1)^i y)$$

respectivement.

2.5 Le complexe quaternionique $\mathcal{BQ}$

Avec les notations du paragraphe 2.3 considérons le complexe $\mathcal{Q}_{*,*}(A)$

$$(A^{\otimes *}, b) \xleftarrow{\theta} (A^{\otimes *}, -b') \oplus (A^{\otimes *}, -b) \xleftarrow{\sigma} (A^{\otimes *}, b) \oplus (A^{\otimes *}, b') \xleftarrow{\phi} (A^{\otimes *}, -b')$$

qui constitue “la période” du complexe $\mathcal{CQ}(A)$. Reécrivons-le sous la forme suivante

$$\mathcal{C}_*(A) \oplus -\mathcal{C}_*(A)[1] \oplus -\mathrm{Bar}_*(A)[1] \oplus \mathrm{Bar}_*(A)[2] \oplus \mathcal{C}_*(A)[2] \oplus -\mathrm{Bar}_*(A)[3],$$

où $X[n]_*$ désigne la n-ième suspension du complexe X_*, c'est-à-dire $X[n]_k = X_{k-n}$. Le signe “$-$” avant un complexe signifie le changement de signe de différentielle. Ainsi la différentielle de $\mathcal{Q}(A)$ peut être représenté par la matrice

$$d_{\mathcal{Q}}: \qquad \begin{pmatrix} b & 1-y & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & t-1 & -1-y & 0 \\ 0 & 0 & -b' & 1+yt & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' & 0 & yt-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b' \end{pmatrix}$$

(voir les notations dans les §§2.2 et 2.3). Soit d la partie diagonale de $d_{\mathcal{Q}}$

$$d = diag\{b, -b, -b', b', b, b'\}$$

et $\delta = d_{\mathcal{Q}} - d$. Appliquons le lemme de perturbation 1.2 pour la perturbation δ et la rétraction par déformation spéciale

$$(\mathcal{Q}'(A), b) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (\mathcal{Q}(A), d; S),$$

où

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{C}_*(A) \oplus -\mathcal{C}_*(A)[1] \oplus \mathcal{C}_*(A)[2]$$

et les opérateurs S, f, ∇ sont donnés par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & -\tilde{s} & & & \\ & & & -\tilde{s} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & -\tilde{s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivement. Comme précédemment, on pose $\tilde{s} = sb's$.

La matrice $S\delta$ est triangulaire supérieure stricte, donc la condition de nilpotence locale est satisfaite. Nous obtenons la rétraction par déformation spéciale

$$(\mathcal{Q}'(A), b+\hat{\delta}) \underset{\hat{\nabla}}{\overset{\hat{f}}{\leftrightarrows}} (\mathcal{Q}(A), d_{\mathcal{Q}}; \hat{S}) \tag{2.6}$$

avec

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{s} & \tilde{s}(1+yt)\tilde{s} & 0 & -\tilde{s}(1+yt)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{s} & 0 & s(yt-1)\tilde{s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{s} \end{pmatrix}, \quad \hat{\nabla} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{s}N \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs $\hat{f}$ et $\hat{\delta}$ s'écrivent matriciellement

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} 1 & (1-t)\tilde{s} & (t-1)\tilde{s}(1+yt)\tilde{s} & 0 & 0 & (t-1)\tilde{s}(1+yt)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s} \\ 0 & 1 & (t+1)\tilde{s} & 0 & 0 & (t-1)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (t-1)\tilde{s} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1-y & B \\ 0 & 0 & -(1+y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons le bicomplexe

$$\mathcal{CQ}(A)\colon \quad (\mathcal{Q}(A), d_{\mathcal{Q}}) \xleftarrow{N_{\mathcal{Q}}} (\mathcal{Q}(A), d_{\mathcal{Q}}) \xleftarrow{N_{\mathcal{Q}}} \cdots,$$

(voir le §2.3). Notons $\mathcal{CQ}(A)_{[i]}$ le i-ième exemplaire de $\mathcal{Q}(A)$ dans $\mathcal{CQ}(A)$. Les différentielles de $\mathcal{CQ}(A)$ entre $\mathcal{CQ}(A)_{[i]}$ et $\mathcal{CQ}(A)_{[i-1]}$ sont égales à $N_{\mathcal{Q}}$.

Introduisons un bicomplexe $\mathcal{CQ}^\circ(A)$ qui est la réunion des $\mathcal{CQ}(A)_{[i]}$, avec les différentielles nulles entre eux et un bicomplexe $\mathcal{BQ}^\circ(A)$ avec $\mathcal{BQ}^\circ(A)_{[i]}$ égal à $\mathcal{Q}'(A)$ et les différentielles nulles entre $\mathcal{BQ}^\circ(A)_{[i]}$ et $\mathcal{BQ}^\circ(A)_{[i-1]}$. Par juxtaposition sur chaque $\mathcal{CQ}^\circ(A)_{[i]}$ de la rétraction (2.6) on obtient une rétraction par déformation spéciale

$$(\mathcal{BQ}^\circ(A), b+\hat{\delta}) \underset{\hat{\nabla}^\circ}{\overset{\hat{f}^\circ}{\leftrightarrows}} (\mathcal{Q}^\circ(A), d_{\mathcal{Q}}; \hat{S}^\circ),$$

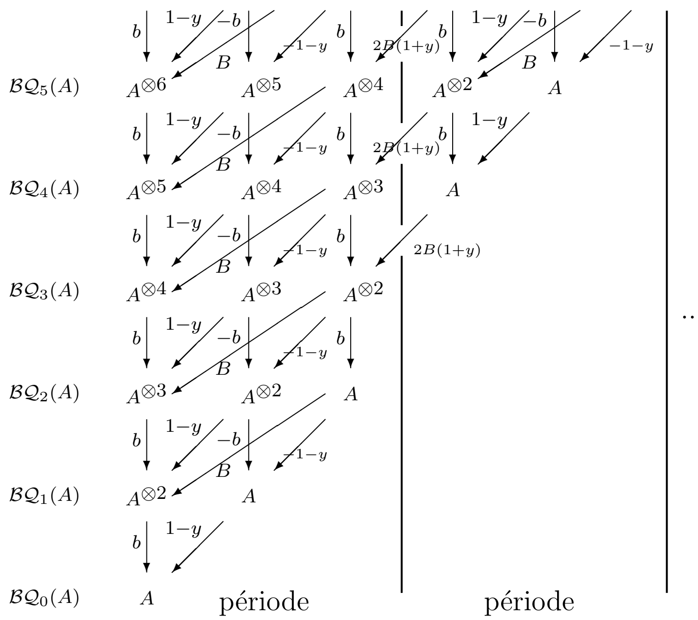
La différentielle $N_{\mathcal{Q}}$ de $\mathcal{CQ}(A)$ peut être considérée comme une perturbation de $\mathcal{CQ}^\circ(A)$. En appliquant le lemme de perturbation nous obtenons que le complexe $(\mathcal{BQ}^\circ(A), b + \hat{\delta} + \hat{N}_{\mathcal{Q}})$, où

$$\hat{N}_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1-t)\tilde{s}(1+y)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s}N_{\mathcal{Q}} \\ 0 & 0 & (t-1)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s}N_{\mathcal{Q}} \\ 0 & 0 & (t-1)\tilde{s}N_{\mathcal{Q}} \end{pmatrix}$$

est une contraction du complexe $\mathcal{CQ}(A)$.

Des raisonnements analogue à ceux du paragraphe 2.4 montrent que les différentielles b, $\hat{\delta}$ et $\hat{N}_{\mathcal{Q}}$ stabilisent les éléments dégénéré de $\mathcal{CQ}(A)$. Donc le lemme 1.5 nous permet de faire le quotient par le sous-complexe dégénérés sans avoir changer les différentielles.

Soit $\mathcal{BQ}(A)$ le complexe suivant



Dans ce diagramme la ligne de rang n représente le module

$$\mathcal{BQ}_n(A) = \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{BQ}_{i,j}(A);$$

les colonnes se repètent de 3 en 3 et les différentielles des colonnes sont la différentielle de Hochschild affectée d'un signe "+" ou "−". Les opérateurs B et y sont ceux définis dans les §§2.2 et 2.3.

Nous avons donc montré

Théorème 2.7: *Le bicomplexe $\mathcal{BQ}(A)$ est une contraction du bicomplexe $\mathcal{CQ}(A)$.*

3 Théorie bivariante

3.1 Complexes avec des périodicités

Définition 3.1: On dit que le complexe (X_*, d) a une périodicité P de degré m s'il existe une application surjective $P: X_* \to X_{*+m}$ qui commute avec la différentielle d.

Soient (X'_*, d') et (X''_*, d'') deux complexes munis des périodicités $P'_1, ..., P'_k$ et $P''_1, ..., P''_k$ respectivement avec P'_i et P''_i de mm̂e degré m_i. Notons $\mathcal{P}'$ l'ensemble des périodicités P'_i

$$\mathcal{P}' = \{P'_1, ..., P'_k\}$$

et $\mathcal{P}''$ l'ensemble des périodicités P''_i

$$\mathcal{P}'' = \{P''_1, ..., P''_k\}.$$

Définition 3.2: La rétraction par déformation

$$(X''_*, d'') \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (X'_*, d'; h)$$

est $\mathcal{P}'$-$\mathcal{P}''$-compatible, si les opérateurs f, ∇ et h commutent avec les périodicités: $fP'_i = P''_i f$, $\nabla P''_i = P'_i \nabla$, $hP'_i = P'_i h$ pour tout i, $1 \leq i \leq k$

Considérons les exemples suivants de périodicités définies sur les complexes construits dans les paragraphes 2.1-2.5.

1. Sur le complexe **cyclique** $\mathcal{BC}$ on définit la périodicité de degré -2

$$S_{\mathcal{BC}}: \quad \mathcal{BC}_n(A) \longrightarrow \mathcal{BC}_{n-2}(A)$$

qui est la projection naturelle de

$$\mathcal{BC}_n(A) = \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} A \otimes \overline{A}^{\otimes n-2i}$$

sur

$$\mathcal{BC}_{n-2}(A) = \bigoplus_{i=1}^{[n/2]} A \otimes \overline{A}^{\otimes n-2i}.$$

Au niveau intuitif $S_{\mathcal{BC}}$ "enlève" la première colonne de bicomplexe $\mathcal{BC}$. Il est clair que $S_{\mathcal{BC}}$ commute avec les différentielles de $\mathcal{BC}$.

De même, on peut définir l'opérateur

$$S_{\mathcal{CC}}\colon \quad \mathcal{CC}_n(A) \longrightarrow \mathcal{CC}_{n-2}(A), \qquad S_{\mathcal{CC}}\colon \quad \bigoplus_{i=1}^{n+1} A^{\otimes i} \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} A^{\otimes i}$$

qui enlève les deux premières colonnes du bicomplexe $\mathcal{CC}$.

Proposition 3.3: *La rétraction par déformation du complexe $\mathcal{CC}$ vers $\mathcal{BC}$, construite dans le paragraphe 2.2 est $S_{\mathcal{BC}}$-$S_{\mathcal{CC}}$-compatible.*

Dans la suite, quand il n'y a pas de risque de confusion, nous écrivons "S-compatible" au lieu de "$S_{\mathcal{BC}}$-$S_{\mathcal{CC}}$-compatible".

Démonstration: Il est facile à montrer que la composition de deux rétractions par déformation S-compatibles est S-compatible. La rétraction considérée est la composition de la rétraction (2.3) et de la rétraction qui nous a permis d'enlever le sous-complexe dégénéré de $\hat{\mathcal{BC}}$ (voir la fin de §2.2). Notons les opérateurs de cette dernière rétraction par f, ∇ et h:

$$(\mathcal{BC}(A), b, \hat{B}) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (\hat{\mathcal{BC}}(A), b, \hat{B}; h). \tag{3.1}$$

Munissons le bicomplexe $\hat{\mathcal{BC}}$ d'une périodicité analogue à $S_{\mathcal{BC}}$.

La S-compatibilité de la rétraction (2.3) résulte de la forme matricielle des opérateurs I_n, J_n et S_n (voir §2.4). Considérons, par exemple, la matrice J_n. L'action à droite $J_n \circ S_{\mathcal{CC}}$ de $S_{\mathcal{CC}}$ sur J_n consiste à enlever les deux premières colonnes de la matrice J_n. L'action à gauche $S_{\mathcal{BC}} \circ J_n$ de $S_{\mathcal{BC}}$ sur J_n consiste à enlever la première ligne de la matrice J_n. Compte tenu de la forme de la matrice J_n (voir §2.4), on a

$$J_n \circ S_{\mathcal{CC}} = S_{\mathcal{BC}} \circ J_n.$$

Le lemme 1.5 nous donne les opérateurs f, ∇ et h de (3.1) en forme matricielle (voir les formules (1.3)). Il en résulte évidemment la commutativité de f avec S. Lorsqu'on compose S avec l'un des opérateurs ∇ ou h soit à droite, soit à gauche, le seul effet est que le dernier facteur dans la somme

$$\sum_{i\geq 0} h(-\delta h)^i\gamma \qquad \text{ou} \qquad \sum_{i\geq 0} h(-\delta h)^i$$

devient nul. Ce qui montre que la rétraction (3.1) est également S-compatible.

$\square$

2. Sur les complexes **quaternioniques** $\mathcal{BQ}$ et $\mathcal{CQ}$ on construit d'une manière analogue les périodicités

$$T_{\mathcal{BQ}}\colon \quad \mathcal{BQ}_n(A) \to \mathcal{BQ}_{n-4}(A),$$

$$T_{\mathcal{CQ}}\colon \quad \mathcal{CQ}_n(A) \to \mathcal{CQ}_{n-4}(A).$$

Ils consistent à "enlever" les trois (resp. quatre) premières colonnes qui forment la période

$$T_{\mathcal{BQ}}\colon \bigoplus_{i=0}^{[n/4]}(A^{\otimes n-4i+1}\oplus A^{\otimes n-4i}\oplus A^{\otimes n-4i-1}) \to \bigoplus_{i=1}^{[n/4]}(A^{\otimes n-4i+1}\oplus A^{\otimes n-4i}\oplus A^{\otimes n-4i-1}).$$

Proposition 3.4: *La rétraction par déformation du complexe $\mathcal{CQ}$ vers le $\mathcal{BQ}$ construite dans le paragraphe 2.5 est $T_{\mathcal{BQ}}$-$T_{\mathcal{CQ}}$-compatible.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.3.

3. Sur le complexe **réflexif** $\mathcal{CR} = \mathcal{CR}^+ \oplus \mathcal{CR}^-$ on a une périodicité de degré -1

$$\Omega_{\mathcal{CR}}\colon \quad \mathcal{CR}_n^+(A) \oplus \mathcal{CR}_n^-(A) \to \mathcal{CR}_{n-1}^-(A) \oplus \mathcal{CR}_{n-1}^+(A)$$

qui enlève les premières colonnes de $\mathcal{CR}^+$ et $\mathcal{CR}^-$. L'opérateur $\Omega_{\mathcal{CR}}$ envoie $\mathcal{CR}^+$ dans $\mathcal{CR}^-$ ainsi que $\mathcal{CR}^-$ dans $\mathcal{CR}^+$. Plus explicitement, la restriction de $\Omega_{\mathcal{CR}}$ sur la partie positive $\mathcal{CR}^+$ est la projection

$$\bigoplus_{i=1}^{n+1} A^{\otimes i} \to \bigoplus_{i=1}^{n} A^{\otimes i}$$

et de même pour $\mathcal{CR}^-$.

4. Les périodicités des complexes **diédraux** $\mathcal{BD}$ et $\mathcal{CD}$ sont plus variées. On définit

$$S_{\mathcal{BD}}\colon \quad \mathcal{BD}_n^+(A) \oplus \mathcal{BD}_n^-(A) \to \mathcal{BD}_{n-2}^-(A) \oplus \mathcal{BD}_{n-2}^+(A)$$

de telle façon que sa restriction sur chaque plan $\mathcal{BC}$, à savoir $\mathcal{BD}^+(A)_{[i]}$ ou $\mathcal{BD}^-(A)_{[i]}$, coïncide avec $S_{\mathcal{BC}}$. Alors, $S_{\mathcal{BD}}$ envoie $\mathcal{BD}^+$ dans $\mathcal{BD}^-$ et $\mathcal{BD}^-$ dans $\mathcal{BD}^+$.

De même on définit

$$S_{\mathcal{CD}}\colon \quad \mathcal{CD}_n^+(A) \oplus \mathcal{CD}_n^-(A) \to \mathcal{CD}_{n-2}^-(A) \oplus \mathcal{CD}_{n-2}^+(A)$$

qui coïncide sur chaque plan $\mathcal{CD}^+(A)_{[i]}$ et $\mathcal{CD}^-(A)_{[i]}$ avec $S_{\mathcal{CC}}$ et qui envoie $\mathcal{CD}^+$ dans $\mathcal{CD}^-$ et $\mathcal{CD}^-$ dans $\mathcal{CD}^+$.

Les opérateurs

$$\Omega_{\mathcal{BD}}\colon \quad \mathcal{BD}_n^+(A) \oplus \mathcal{BD}_n^-(A) \to \mathcal{BD}_{n-1}^-(A) \oplus \mathcal{BD}_{n-1}^+(A),$$

$$\Omega_{\mathcal{CD}}\colon \quad \mathcal{CD}_n^+(A) \oplus \mathcal{CD}_n^-(A) \to \mathcal{CD}_{n-1}^-(A) \oplus \mathcal{CD}_{n-1}^+(A)$$

sont des périodicités des bicomplexes $\mathcal{BD}$ et $\mathcal{CD}$ dans une autre direction. Sur chaque plan $\mathcal{CR}$ de $\mathcal{BD}$ ou $\mathcal{CD}$ elles coïncident avec la périodicité “réflexive” $\Omega_{\mathcal{CR}}$. Tout comme $S_{\mathcal{CD}}$ et $S_{\mathcal{BD}}$, les opérateurs $\Omega_{\mathcal{CD}}$ et $\Omega_{\mathcal{BD}}$ envoient la partie positive dans la partie négative et réciproquement.

Proposition 3.5: *La rétraction par déformation du complexe $\mathcal{CD}$ vers le complexe $\mathcal{BD}$, construite dans le paragraphe 2.4 est $S_{\mathcal{BD}}\Omega_{\mathcal{BD}}$-$S_{\mathcal{CD}}\Omega_{\mathcal{CD}}$-compatible.*

Démonstration: Comme dans le cas cyclique, la rétraction par déformation se decompose en deux rétractions successives: la rétraction du complexe $\mathcal{CD}(A)$ vers le complexe $\mathcal{BD}^\circ(A)$ et la rétraction du complexe $\mathcal{BD}^\circ(A)$ vers le complexe $\mathcal{BD}(A)$ (voir §2.4).

La démonstration de la S-Ω-compatibilité de la deuxième rétraction est analogue à la deuxième partie de démonstration de la proposition 3.3. Pour vérifier que la première rétraction est également S-Ω-compatibile, il faut montrer que les opérateurs $\hat{I}_n$, $\hat{J}_n$ et $\hat{S}_n$ (voir §2.4) commutent avec les périodicités S et Ω. Prouvons le pour $\hat{S}_n$ (pour $\hat{I}_n$ et $\hat{J}_n$ les raisonnements sont analogues). L'opérateur $\hat{S}_n$ est représenté par la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} S_n & S_n\delta_n S_{n-1} & & & & \\ 0 & S_{n-1} & S_{n-1}\delta_{n-1}S_{n-2} & & \cdots & \\ & 0 & S_{n-2} & \cdots & & \cdots \\ & & 0 & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \\ & & & & \cdots & S_1\delta_1 S_0 \\ & & & & \cdots & S_0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

composée de blocs

$$\mathrm{Bl}_{n,k} = S_n \prod_{i=0}^{k} (\delta_{n-i} S_{n-i-1}).$$

La Ω-commutativité de $\hat{S}_n$ se traduise en langage matriciel par l'affirmation suivante: si on enlève la première ligne et la première colonne (des blocs) de la matrice $\hat{S}_n$, on obtient la matrice $\hat{S}_{n-1}$. La S-commutativité de $\hat{S}_n$ se traduise comme suit: si on enlève les deux premières lignes et les deux premières colonnes dans chaque bloc de la matrice $\hat{S}_n$, on obtient la matrice $\hat{S}_{n-2}$. En effet, il résulte de la forme explicite des matrices S_i et δ_i que si on enlève les deux premières lignes et les deux premières colonnes dans le bloc $\mathrm{Bl}_{n,k}$ on obtient le bloc $\mathrm{Bl}_{n-2,k}$. $\square$

3.2 Cohomologie bivariante

Soient (X'_*, d') et (X''_*, d'') deux complexes munis des ensembles des périodicités respectifs

$$\mathcal{P}' = \{P'_1, ..., P'_k\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'' = \{P''_1, ..., P''_k\},$$

avec P'_i et P''_i de degré m_i. L'ensemble des morphismes de modules gradués

$$f: \quad X'_* \to X''_*$$

forme un complexe de chaînes $(\mathrm{Hom}(X'_*, X''_*), d_{Hom})$. On dit que l'élément f de $\mathrm{Hom}(X'_*, X''_*)$ est de graduation n, s'il augmente la graduation des modules par n, c'est-à-dire qu'on a

$$f: \quad X'_l \to X''_{l+n}.$$

La différentielle est définie de la manière standard

$$d_{Hom}(f) = d''f - (-1)^{|f|} f d'.$$

Par définition, les périodicités $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ commutent avec les différentielles correspondantes et par conséquent les morphismes $\mathcal{P}'$-$\mathcal{P}''$-commutatifs forment un sous-complexe de $\mathrm{Hom}(X'_*, X'')$ noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}'-\mathcal{P}''}(X'_*, X''_*)$.

Définition 3.6: Soient (X'_*, d') et (X''_*, d'') deux complexes de chaînes et soient $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ des ensembles des périodicités sur ces complexes. La cohomologie bivariante d'une paire de complexes (X'_*, d') et (X''_*, d'') avec les périodicités $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ est l'homologie du complexe

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}'-\mathcal{P}''}(X'_*, X''_*), d_{Hom}).$$

On la note

$$H^n_{\mathcal{P}'-\mathcal{P}''}(X'_*, X''_*) = H_{-n}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}'-\mathcal{P}''}(X'_*, X''_*)\big).$$

Il est facile de voir que les cocycles qui correspondent à la cohomologie construite sont les morphismes de modules $f : X'_* \to X''_*$ tels qu'ils commutent avec les périodicités $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$ et avec les différentielles de complexes, c'est-à-dire $fP'_i = P''_i f$ et $fd = df$.

Le cocycle f est un cobord, s'il est homotope à zéro, autrement dit, s'il existe h dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}'-\mathcal{P}''}(X'_*, X''_*)$ tel que

$$f = d''h - (-1)^{|h|} h d'.$$

La proposition suivante prolonge les résultat de [10, §8].

Proposition 3.7: *Soient* (X_*, d_1), (X'_*, d'_1) *et* (Y_*, d_2), (Y'_*, d'_2) *des complexes avec des ensembles de périodicités* $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}'_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}'_2$ *respectivement de degrés* $(m_1, ..., m_k)$ *et soient*

$$(X'_*, d'_1) \underset{g_1}{\overset{f_1}{\leftrightarrows}} (X_*, d_1; h_1) \quad et \quad (Y'_*, d'_2) \underset{g_2}{\overset{f_2}{\leftrightarrows}} (Y_*, d_2; h_2) \tag{3.2}$$

des rétractions par déformation $\mathcal{P}_1$-$\mathcal{P}'_1$*-compatible et* $\mathcal{P}_2$-$\mathcal{P}'_2$*-compatible respectivement. Alors*

$$(Hom_{\mathcal{P}'_1-\mathcal{P}_2}(X'_*, Y_*), d_{Hom}) \underset{g_1^*}{\overset{f_1^*}{\leftrightarrows}} (Hom_{\mathcal{P}'-\mathcal{P}''}(X_*, Y_*), d_{Hom}; h_1^*) \tag{3.3}$$

$$(Hom_{\mathcal{P}_1-\mathcal{P}'_2}(X_*, Y'_*), d_{Hom}) \underset{g_2^*}{\overset{f_2^*}{\leftrightarrows}} (Hom_{\mathcal{P}'-\mathcal{P}''}(X_*, Y_*), d_{Hom}; h_2^*) \tag{3.4}$$

sont des rétractions par déformation.

Si les rétractions (3.2) sont spéciales, alors les rétractions (3.3) et (3.4) sont également spéciales.

Les applications f_1^*, g_1^*, h_1^*, f_2^*, g_2^*, h_2^* sont définies par

$$f_1^*: \quad \kappa_1 \to (-1)^{|\kappa_1|\cdot|f_1|}\kappa_1 \circ f_1, \qquad f_2^*: \quad \kappa_2 \to f_2 \circ \kappa_2;$$

$$g_1^*: \quad \kappa_1 \to (-1)^{|\kappa_1|\cdot|g_1|}\kappa_1 \circ g_1, \qquad g_2^*: \quad \kappa_2 \to g_2 \circ \kappa_2;$$

$$h_1^*: \quad \kappa \to (-1)^{|\kappa|\cdot|h_1|}\kappa \circ h_1, \qquad h_2^*: \quad \kappa \to h_2 \circ \kappa;$$

La démonstration consiste en des calculs explicites.

On a le corollaire.

Théorème 3.8: *Sous les conditions de la proposition 3.7 on a un isomorphisme de k-modules*

$$H^*_{\mathcal{P}_1-\mathcal{P}_2}(X_*, Y_*) \cong H^*_{\mathcal{P}'_1-\mathcal{P}'_2}(X'_*, Y'_*).$$

Considérons les cas particuliers suivants de cohomologies bivariantes de complexes avec périodicités.

Définition 3.9: La cohomologie bivariante cyclique des deux algèbres A et B est la cohomologie bivariante des complexes $\mathcal{CC}(A)$ et $\mathcal{CC}(B)$ avec la périodicité $S_{\mathcal{CC}}$

$$HC^*(A, B) = H^*_{S_{\mathcal{CC}}}(\mathcal{CC}(A), \mathcal{CC}(B)).$$

Remarque 3.10: Par la proposition 3.3 et le théorème 3.8 on a l'isomorphisme

$$HC^*(A, B) \cong H^*_{S_{\mathcal{BC}}}(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)).$$

Définition 3.11: La cohomologie bivariante quaternionique des deux algèbres A et B est la cohomologie bivariante des complexes $\mathcal{CQ}(A)$ et $\mathcal{CQ}(B)$ avec la périodicité $T_{\mathcal{CQ}}$

$$HQ^*(A, B) = H^*_{T_{\mathcal{CQ}}}(\mathcal{CQ}(A), \mathcal{CQ}(B)).$$

Remarque 3.12: Par la proposition 3.4 et le théorème 3.8 on a l'isomorphisme

$$HQ^*(A,B) \cong H^*_{T_{\mathcal{BQ}}}(\mathcal{BQ}(A), \mathcal{BQ}(B)).$$

Définition 3.13: La cohomologie bivariante diédrale des deux algèbres A et B est la cohomologie bivariante des complexes $\mathcal{CD}(A)$ et $\mathcal{CD}(B)$ avec les périodicités $S_{\mathcal{CD}}$ et $\Omega_{\mathcal{CD}}$

$$HD^*(A,B) = H^*_{S_{\mathcal{CD}}\Omega_{\mathcal{CD}}}(\mathcal{CD}(A), \mathcal{CD}(B)).$$

Remarque 3.14: Par la proposition 3.5 et le théorème 3.8 on a l'isomorphisme

$$HD^*(A,B) \cong H^*_{S_{\mathcal{BD}}\Omega_{\mathcal{CD}}}(\mathcal{BD}(A), \mathcal{BD}(B)).$$

Définition 3.15: La cohomologie bivariante réflexive des deux algèbres A et B est la cohomologie bivariante des complexes $\mathcal{CR}(A)$ et $\mathcal{CR}(B)$ avec la périodicité $\Omega_{\mathcal{CR}}$

$$HR^*(A,B) = H^*_{\Omega_{\mathcal{CR}}}(\mathcal{CR}(A), \mathcal{CR}(B)).$$

Remarque 3.16: Chaque élément $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(A))$ consiste en quatre composantes

$$f_{++}\colon\ \mathcal{BD}^+(A) \to \mathcal{BD}^+(B), \qquad f_{+-}\colon\ \mathcal{BD}^+(A) \to \mathcal{BD}^-(B),$$

$$f_{--}\colon\ \mathcal{BD}^-(A) \to \mathcal{BD}^-(B), \qquad f_{-+}\colon\ \mathcal{BD}^-(A) \to \mathcal{BD}^+(B).$$

Les morphismes f ayant les composantes f_{+-} et f_{-+} nulles forment un sous-complexe

$$\mathrm{Hom}^+_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}(A), \mathcal{BD}(B))$$

dans le complexe des morphismes $S\Omega$-commutatifs. Les morphismes f ayant les composantes f_{++} et f_{--} nulles forment un sous-complexe

$$\mathrm{Hom}^{+}_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}(A),\mathcal{BD}(B)).$$

On a alors une décomposition

$$HD^{*}(A,B)=HD^{*}_{+}(A,B)\oplus HD^{*}_{-}(A,B)$$

avec

$$HD^{n}_{+}(A,B)=H_{-n}(\mathrm{Hom}^{+}_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}(A),\mathcal{BD}(B)))$$

et

$$HD^{n}_{-}(A,B)=H_{-n}(\mathrm{Hom}^{-}_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}(A),\mathcal{BD}(B))).$$

De même on a une décomposition de la cohomologie réflexive

$$HR^{*}(A,B)=HR^{*}_{+}(A,B)\oplus HR^{*}_{-}(A,B).$$

3.3 Etude du cas où 2 est inversible

Supposons que l'élément 2 soit inversible dans l'anneau de base k. Alors, le module $A^{\otimes n}$ se décompose en somme directe

$$A^{\otimes n}=Im(1-y)\oplus Im(1+y).$$

En effet, on a les deux projecteurs $p_1=\frac{1}{2}(1-y)$ et $p_2=\frac{1}{2}(1+y)$ avec $p_1+p_1=\mathrm{id}$.

Ensuite, comme l'opérateur $(1-y)$ commute avec les différentielles du complexe de Hochschild, ainsi qu'avec celles du complexe cyclique $\mathcal{BC}(A)$, on a la décomposition

$$(\mathcal{C}_{*}(A),b)=(\mathcal{C}^{+}_{*}(A),b)\oplus(\mathcal{C}^{-}_{*}(A),b), \tag{3.5}$$

où $\mathcal{C}^{+}_{n}(A)$ désigne l'image de $(1+y)$ dans $A^{\otimes n+1}$ et $\mathcal{C}^{-}_{n}(A)$ désigne l'image de $(1-y)$ dans $A^{\otimes n+1}$. On a également la décomposition

$$\mathcal{BC}(A)=\mathcal{BC}^{+}(A)\oplus\mathcal{BC}^{-}(A)$$

avec

$$\mathcal{BC}^+ : \quad \begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "b"'] \\
\mathcal{C}_2^+ \arrow[d, "b"'] & \mathcal{C}_1^- \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & \mathcal{C}_0^+ \arrow[l, "B"'] \\
\mathcal{C}_1^+ \arrow[d, "b"'] & \mathcal{C}_0^- \arrow[l, "B"'] & \\
\mathcal{C}_0^+ & &
\end{tikzcd}
\qquad
\mathcal{BC}^- : \quad \begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "b"'] \\
\mathcal{C}_2^- \arrow[d, "b"'] & \mathcal{C}_1^+ \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & \mathcal{C}_0^- \arrow[l, "B"'] \\
\mathcal{C}_1^- \arrow[d, "b"'] & \mathcal{C}_0^+ \arrow[l, "B"'] & \\
\mathcal{C}_0^- & &
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

(voir [15]).

Il en résulte que les bicomplexes $\mathcal{BC}^+(A)$ et $\mathcal{BC}^-(A)$ sont facteurs directs des complexes $\mathcal{BD}^+(A)$ et $\mathcal{BD}^-(A)$ respectivement.

Théorème 3.17: *Les complexes $\mathcal{BD}^+(A)$ et $\mathcal{BD}^-(A)$ sont contractibles vers les complexes $\mathcal{BC}^+(A)$ et $\mathcal{BC}^-(A)$ respectivement.*

Afin d'alléger la preuve, introduisons les complexes $(\mathcal{R}_*^{n+}, d^+)$ et $(\mathcal{R}_*^{n-}, d^-)$, où $d_i^+ = 1 - (-1)^i y$ et $d_i^- = 1 + (-1)^i y$ et où les complexes sont représentés par les diagrammes

$$\mathcal{R}^{n+} : \quad A^{\otimes n} \xleftarrow{1-y} A^{\otimes n} \xleftarrow{1+y} A^{\otimes n} \xleftarrow{1-y} \cdots ,$$

$$\mathcal{R}^{n-} : \quad A^{\otimes n} \xleftarrow{1+y} A^{\otimes n} \xleftarrow{1-y} A^{\otimes n} \xleftarrow{1+y} \cdots .$$

Remarquons, que $\mathcal{R}^{n+}$ et $\mathcal{R}^{n+}$ forment les lignes des complexes $\mathcal{CD}(A)$ et $\mathcal{CR}(A)$.

Soient $(\hat{\mathcal{R}}_*^{n+}, 0)$ et $(\hat{\mathcal{R}}_*^{n-}, 0)$ les complexes à différentielles nulles avec

$$\hat{\mathcal{R}}_0^{n+} = A^{\otimes n} / \, Im(1-y), \qquad \hat{\mathcal{R}}_0^{n-} = A^{\otimes n} / \, Im(1+y),$$

$\hat{\mathcal{R}}_i^{n+} = 0$ et $\hat{\mathcal{R}}_i^{n-} = 0$ pour $i > 0$.

De simples calculs démontrent la proposition suivante:

Lemme 3.18: *On a les rétractions par déformation spéciales suivantes*

$$(\hat{\mathcal{R}}_*^{n+}, 0) \underset{i}{\overset{p}{\leftrightarrows}} (\mathcal{R}_*^{n+}, d^+; h^+), \qquad (\hat{\mathcal{R}}_*^{n-}, 0) \underset{i}{\overset{p}{\leftrightarrows}} (\mathcal{R}_*^{n-}, d^-; h^-), \tag{3.7}$$

où p et i sont les projection et inclusion naturelles. Les homotopies h^+ et h^- sont données par:

$$h_j^{\pm} : \mathcal{R}_j^{n\pm} \to \mathcal{R}_j^{n\pm}, \qquad h_j^+ = \frac{1}{4}(1 - (-1)^j y), \qquad h_j^- = \frac{1}{4}(1 + (-1)^j y).$$

Remarque 3.19: La somme directe des rétractions (3.7) donne une rétraction du complexe $\mathcal{R}_*^{n+} \oplus \mathcal{R}_*^{n-}$ vers le complexe trivial dont la composante de degré zéro est $A^{\otimes n}$ et dont toutes les autres sont nulles.

Démonstration: (du théorème 3.17.) Considérons le cas du complexe positif $\mathcal{BD}^+(A)$, le cas du complexe négatif étant analogue.

Chaque plan $\mathcal{BC}$ de $\mathcal{BD}^+(A)$ se décompose à la somme directe suivante $\mathcal{BD}^+(A)_{[j]} = \mathcal{BC}^+(A) \oplus \mathcal{BC}^-(A)$. Soit

$$i: \quad \mathcal{BC}^+(A) \to \mathcal{BD}^+(A)$$

l'inclusion qui envoie $\mathcal{BC}^+$ sur le facteur correspondant du premier plan de $\mathcal{BD}^+$ et soit

$$p: \quad \mathcal{BD}^+(A) \to \mathcal{BC}^+(A)$$

la projection, qui est égale à l'identité sur le facteur $\mathcal{BC}^+$ du premier plan de $\mathcal{BD}^+$ et qui est nulle sur le reste.

On définit l'homotopie

$$h: \quad \mathcal{BD}^+(A) \to \mathcal{BD}^+(A),$$

par $h = h^+$ (du lemme 3.18) sur chaque colonne $\mathcal{R}^{n+}$ de $\mathcal{BD}^+$ et $h = h^-$ sur chaque colonne $\mathcal{R}^{n+}$ de $\mathcal{BD}^+$. On obtient une rétraction par déformation spéciale

$$(\mathcal{BC}^+(A), b, B) \underset{i}{\overset{p}{\leftrightarrows}} (\mathcal{BD}^+(A), b, B, \omega^\pm; h).$$

En effet, il est clair que $p \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{BC}^+}$. Les conditions (1.1) résultent de celles des rétractions (3.7). Il nous reste à vérifier la relation

$$(b + B + \omega^\pm)h + h(b + B + \omega^\pm) = \mathrm{id}_{\mathcal{BD}^+} - i \circ p. \tag{3.8}$$

On sait que $b + B$ commute avec la troisième différentielle du complexe $\mathcal{BD}^+(A)$, que nous avons noté symboliquement par $\omega^\pm$. Cela implique que $b + B$ commute avec h, parce que h consiste en les mêmes applications que $\omega^\pm$ (à multiplication par 1/4 près). Donc nous pouvons réécrire (3.8) sous la forme

$$\omega^\pm h + h\omega^\pm = \mathrm{id}_{\mathcal{BD}^+} - i \circ p,$$

ce qui est la conséquence directe des relations analogues de (3.7). $\square$

De même on démontre

Théorème 3.20: *Supposons* $1/2 \in k$. *Alors le complexe* $\mathcal{C}^+(A)$ *est une contraction du complexe* $\mathcal{CR}^+(A)$ *et* $\mathcal{C}^-(A)$ *est une contraction du complexe* $\mathcal{CR}^-(A)$.

Le théorème qui suit est analogue au théorème 2.5 de [14].

Théorème 3.21: *Supposons* $1/2 \in k$. *Alors le complexe* $\mathcal{BC}^+(A)$ *est une contraction du complexe quaternionique* $\mathcal{BQ}(A)$.

Démonstration: A l'aide de la décomposition (3.5) réécrivons le bicomplexe $\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$ (voir §2.5) sous la forme d'un bicomplexe avec période

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^+_* \oplus \mathcal{C}^-_* & \mathcal{C}^+[1]_* \oplus \mathcal{C}^-[1]_* \arrow[l, "1-y"'] & \mathcal{C}^+[2]_* \oplus \mathcal{C}^-[2]_* \arrow[l, "-1-y"'] \arrow[ll, bend right, "B"'] & \cdots \arrow[l, "2B(1+y)"'] \end{tikzcd}$$

Le degré de B est -2 et le degré de $\pm 1-y$ est -1, c'est pourquoi le diagramme a un sens.

La restriction de $(1-y)$ sur $\mathcal{C}^-_*(A)$ et la restriction de $(1+y)$ sur $\mathcal{C}^+_*(A)$ consistent en la multiplication par 2. Par conséquent les sous-complexes

$$\mathcal{C}^-_*(A) \xleftarrow{1-y} \mathcal{C}^-_*(A)$$

et les complexes quotients

$$\mathcal{C}^+_*(A) \xleftarrow{-1-y} \mathcal{C}^+_*(A)$$

de $\mathcal{BQ}(A)$ sont contractibles. Il résulte du lemme 1.4 que le complexe

$$\mathcal{C}^+_*(A) \xleftarrow{B} \mathcal{C}^-[2]_*(A) \xleftarrow{2B(1+y)} \mathcal{C}^+[4]_*(A) \xleftarrow{B} \cdots \tag{3.9}$$

est une contraction du complexe $\mathcal{BQ}(A)$. Comme la restriction de l'opérateur $2B(1+y)$ sur $\mathcal{C}^+_*(A)$ est égale à $4B$ le complexe (3.9) est isomorphe à $\mathcal{BC}^+(A)$. $\square$

Considérons la périodicité $T_{\mathcal{BC}}$ de degré -4 sur le complexe $\mathcal{BC}^+$, qui enlève les deux premières colonnes. Les opérateurs de la rétraction du théorème 3.21 stabilisent les périodes des complexes $\mathcal{BQ}$ et $\mathcal{BC}^+$. Donc la rétraction est T-compatible et nous avons le corollaire.

Corollaire 3.22: *Supposons* $1/2 \in k$. *Alors on a un isomorphisme de k-modules*

$$HQ^*(A,B) \cong H^*_T(\mathcal{BC}^+(A), \mathcal{BC}^+(B)).$$

Remarque 3.23: Dans le cas quaternionique, l'homotopie h entre les complexes diédraux (voir le théorème 3.17) ne commute pas avec les périodicités correspondantes ($S_{\mathcal{BD}}$ et $\Omega_{\mathcal{BD}}$). Par exemple, sur les éléments du premier plan $\mathcal{BD}(A)_{[0]}$, on a $h \circ \Omega_{\mathcal{BD}} = 0 \neq \Omega_{\mathcal{BD}} \circ h$.

Théorème 3.24: *Supposons* $1/2 \in k$. *Alors on a des isomorphismes de* k*-modules*

$$HD^*_+(A,B) \cong HC^*_+(A,B) \oplus HC^*_-(A,B) \cong HD^*_-(A,B).$$

La démonstration consiste à expliciter des homomorphismes de complexes $\mathcal{BD}$.

Corollaire 3.25: *Supposons* $1/2 \in k$. *Alors on a un isomorphisme de* k*-modules*

$$HD^*(A,B) \cong HC^*(A,B) \oplus HC^*(A,B).$$

Vu le théorème 3.24 nous nous concentrons sur les complexes $\mathcal{BC}^+$ et $\mathcal{BC}^-$ et sur les cohomologies correspondantes $HC^*_+(A,B)$ et $HC^*_-(A,B)$.

3.4 Les suites exactes

Etudions la structure explicite des homomorphismes de complexes avec périodicités introduits dans les paragraphes 2.1-2.5.

1. **Complexe cyclique.** Soit f un élément de $Hom_S(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B))$ du degré n, c'est-à-dire

$$f: \quad Tot_* \mathcal{BC}(A) \to Tot_{*+n} \mathcal{BC}(B).$$

Les décompositions en somme directe des modules

$$Tot_k \mathcal{BC}(A) = \bigoplus_{i=0}^{[k/2]} A \otimes \overline{A}^{\otimes k-2i}, \qquad Tot_k \mathcal{BC}(B) = \bigoplus_{i=0}^{[k/2]} B \otimes \overline{B}^{\otimes k-2i}$$

induisent la décompositions de f en somme de ses composantes

$$f_{pqrs} \mathcal{BC}_{pq}(A) \to \mathcal{BC}_{rs}(A)$$

avec $\mathcal{BC}_{pq}(A) = A \otimes \overline{A}^{\otimes q-p}$, $\mathcal{BC}_{rs}(B) = B \otimes \overline{B}^{\otimes s-r}$, $r+s-p-q=n$. La condition de commutativité des homomorphismes avec S implique que toutes les composantes de f qui envoient $A \otimes \overline{A}^{\otimes i}$ dans $B \otimes \overline{B}^{\otimes j}$ avec i et j fixes sont égales, c'est-à-dire que si $q_1 - p_1 = q_2 - p_2 = i$ et $s_1 - r_1 = s_2 - r_2 = j$, alors $f_{p_1 q_1 r_1 s_1} = f_{p_2 q_2 r_2 s_2}$. En effet, comme S enlève la première colonne du bicomplexe $\mathcal{BC}$, ces composantes sont tous égales à la composante $f_{i'j'0j}$ avec $i' = \frac{1}{2}(i+j-n)$ et $j' = \frac{1}{2}(j-i-n)$. Notons $f_{i'j'0j}$ par F_{ij}.

De même on obtient $F_{ij} = 0$ lorsque $i+j+n$ est impair ou lorsque $i+n > j$.

Par conséquent chaque homomorphisme S-commutatif f peut être représenté par une matrice triangulaire infinie $(F_{ij})_{i=0,\, j=0}^{\infty}$ avec les élements nuls en échiquier.

La matrice de la composition de deux homomorphismes est le produit des matrices correspondantes

$$(F \circ G)_{ij} = \sum_k F_{ik} G_{kj}.$$

La différentielle s'écrite en forme matricielle comme suit

$$dF_{ij} = bF_{i,j+1} + BF_{i,j-1} - (-1)^{|f|} F_{i+1,j} B - (-1)^{|f|} F_{i-1,j} b.$$

2. **Complexe diédral.** Tout comme les complexes d'homomorphismes $Hom_{S\Omega}(\mathcal{BD}(A), \mathcal{BD}(B))$ et $Hom_{\Omega}(\mathcal{CR}(A), \mathcal{CR}(B))$ (voir §3.2) le complexe

$$Hom_S(\mathcal{BC}^+(A) \oplus \mathcal{BC}^-(A), \mathcal{BC}^+(B) \oplus \mathcal{BC}^-(B)) = Hom_S(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B))$$

se décompose en somme directe de ses partie positive et négative:

$$Hom_S(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)) = Hom_S^+(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)) \oplus Hom_S^-(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)).$$

Chaque homomorphisme positif consiste en deux composantes

$$f^{++} : \mathcal{BC}^+(A) \to \mathcal{BC}^+(B) \qquad f^{--} : \mathcal{BC}^+(A) \to \mathcal{BC}^+(B)$$

et chaque homomorphisme négatif consiste en deux composantes

$$f^{+-} : \mathcal{BC}^+(A) \to \mathcal{BC}^-(B) \qquad f^{-+} : \mathcal{BC}^-(A) \to \mathcal{BC}^+(B).$$

Remarquons la périodicité S envoie $\mathcal{BC}^+$ sur $\mathcal{BC}^-$ et réciproquement. Donc la composante f^{--} de l'homomorphisme positif f est définie automatiquement par la composante f^{++}. De même f^{-+} est définie par f^{+-}.

Soit f un homomorphisme positif S-commutatif du degré n (le cas de f négatif est analogue). Alors f peut être répresenté par une paire des matrices triangulaires infinies avec les élements non nuls en échiquier: $(F_{ij})_{i\geq 0, j\geq 0}$ et $(\overline{F}_{ij})_{i\geq 0, j\geq 0}$, $F_{ij} = 0$ quand $i+j+n$ est impair ou quand $i+n > j$ et de même pour $\overline{F}_{ij}$.

A l'aide de la présentation (3.6) des complexes $\mathcal{BC}^+$ et $\mathcal{BC}^-$ détaillons les matrices (F_{ij}) et $(\overline{F}_{ij})$. Si $i = 4k_1$ ou $i = 4k_1+3$ et si $j-n = 4k_2$ ou $j-n = 4k_2+3$, alors on a $F_{ij} : \mathcal{C}_i^+(A) \to \mathcal{C}_j^+(B)$, $\overline{F}_{ij} : \mathcal{C}_i^-(A) \to \mathcal{C}_j^-(B)$.

Si $i = 4k_1+1$ ou $i = 4k_1+2$ et si $j-n = 4k_2$ ou $j-n = 4k_2+3$, alors on a $F_{ij} : \mathcal{C}_i^-(A) \to \mathcal{C}_j^+(B)$, $\overline{F}_{ij} : \mathcal{C}_i^+(A) \to \mathcal{C}_j^-(B)$.

Si $i = 4k_1$ ou $i = 4k_1+3$ et si $j-n = 4k_2+1$ ou $j-n = 4k_2+2$, alors on a $F_{ij} : \mathcal{C}_i^+(A) \to \mathcal{C}_j^-(B)$, $\overline{F}_{ij} : \mathcal{C}_i^-(A) \to \mathcal{C}_j^+(B)$.

Si $i = 4k_1+1$ ou $i = 4k_1+2$ et si $j-n = 4k_2+1$ ou $j-n = 4k_2+2$, alors on a $F_{ij} : \mathcal{C}_i^-(A) \to \mathcal{C}_j^-(B)$, $\overline{F}_{ij} : \mathcal{C}_i^+(A) \to \mathcal{C}_j^+(B)$.

La composition de $(F_{ij}, \overline{F}_{ij})$ avec $(G_{ij}, \overline{G}_{ij})$ est une paire

$$(\sum_k F_{ik}\overline{G}_{kj}, \sum_l F_{il}\overline{G}_{lj}).$$

Les différentielles s'écrivent comme dans le cas cyclique.

3. **Complexe quaternionique.** Considérons les homomorphismes "quaternioniques"

$$f \in \mathrm{Hom}_T(\mathcal{BQ}(A), \mathcal{BQ}(B)) \cong \mathrm{Hom}_T(\mathcal{BC}^+(A), \mathcal{BC}^+(B)).$$

Dans les cas cyclique et diédral, la commutativité avec la périodicité S nécessite que les composantes des matrices correspondantes soient nulles en haut de la diagonale $j-i=n$. La condition de T-commutativité est moins restrictive. Comme la $2k$-ième et la $(2k+1)$-ième colonnes du bicomplexe $\mathcal{BC}^+$ se trouvent dans la période de T, alors les homomorphismes qui envoient les éléments de la $2k$-ième colonne de $\mathcal{BC}^+(A)$ sur les éléments de la $(2k+1)$-ième colonne de $\mathcal{BC}^+(B)$ sont non nuls en général. Chaque homomorphisme T commutatif se représente donc par une paire des matrices $(F_{ij})_{i\geq 0, j\geq 0}$ et $(\overline{F}_{ij})_{i\geq 0, j\geq 0}$ décrites précédemment plus la diagonale supplémentaire

$$F_{j-n+2,j} : \mathcal{C}_{j-n+2}^+(A) \to \mathcal{C}_j^-, \quad j \geq 0,$$

où n est le degré de l'homomorphisme.

Théorème 3.26: *On suppose $1/2 \in k$. Alors les suites suivantes sont exactes*

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_S[-2](\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)) \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{S} Hom_S(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)) \longrightarrow Hom(\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(B)) \to 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

(voir [9]),

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_S^-[-2](\mathcal{BC}^+(A) \oplus \mathcal{BC}^-(A), \mathcal{BC}^+(B) \oplus \mathcal{BC}^-(B)) \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{S} Hom_S^+(\mathcal{BC}^+(A) \oplus \mathcal{BC}^-(A), \mathcal{BC}^+(B) \oplus \mathcal{BC}^-(B)) \longrightarrow \\ \longrightarrow Hom(\mathcal{C}^+(A), \mathcal{C}^+(B)) \oplus Hom(\mathcal{C}^-(A), \mathcal{C}^-(B)) \to 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} 0 \to Hom_S^+(\mathcal{BC}^+(A) \oplus \mathcal{BC}^-(A), \mathcal{BC}^+(B) \oplus \mathcal{BC}^-(B)) \xrightarrow{W} \\ \xrightarrow{W} Hom_T(\mathcal{BC}^+(A), \mathcal{BC}^+(B)) \longrightarrow Hom[-2](\mathcal{C}^+(A), \mathcal{C}^-(B)) \to 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Démonstration: L'application S consiste en l'inclusion des matrices triangulaires, telles que $F_{ij} = 0$ quand $i - j > n - 1$, dans les matrices triangulaires, telles que $F_{ij} = 0$ quand $i - j > n$. Les composantes F_{ij} avec $i - j = n$ définissent le morphisme du complexe de Hochschild.

L'application W est l'inclusion naturelle des paire des matrices dans des paires des matrices avec "la diagonale supplémentaire". Dans l'image de W les élément de "la diagonale supplémentaire" sont nuls. Les éléments de cette diagonale définissent le morphisme du complexe de Hochschild.

Il résulte de la représentation matricielle que les opérateurs S et W sont les morphismes des complexes et que les suites (3.10), (3.11) et (3.12) sont exactes. $\square$

Remarque 3.27: Si on remplace Hom_S^+ par Hom_S^- et réciproquement dans la suite (3.11), on obtient une autre suite exacte.

Désignons

$$HR^n_{++}(A, B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^+(A), \mathcal{C}^+(B))),$$

$$HR^n_{--}(A, B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^-(A), \mathcal{C}^-(B))),$$

$$HR^n_{+-}(A, B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^+(A), \mathcal{C}^-(B))).$$

Corollaire 3.28: *On a les suites exactes longues*

$$\cdots \to HC^{n-2}(A,B) \to HC^{n}(A,B) \to HH^{n}(A,B) \to HC^{n-1} \to HC^{n+1} \to \cdots$$

$$\begin{aligned}\cdots \to HC_{-}^{n-2}(A,B) \to HC_{+}^{n}(A,B) \to& \\ \to HR_{++}^{n}(A,B) \oplus HR_{--}^{n}(A,B) &\to HC_{-}^{n-1} \to HC_{+}^{n+1} \to \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cdots \to HC_{+}^{n}(A,B) \to HQ^{n}(A,B) \to& \\ \to HR_{+-}^{n}(A,B) &\to HC_{+}^{n+1}(A,B) \to HQ^{n+1}(A,B) \to \cdots\end{aligned}$$

qui correspondent aux suites courtes exactes du théorème 3.26.

Remarque 3.29: Avec la même méthode on peut prouver que la suite

$$\begin{aligned}\cdots \to HD_{-}^{n-2}(A,B) \to HD_{+}^{n}(A,B) \to& \\ \to HR_{+}^{n}(A,B) &\to HD_{-}^{n-1}(A,B) \to HD_{+}^{n+1}(A,B) \to \cdots\end{aligned}$$

qui généralise la suite (3.11) est exacte. Ce fait ne dépend pas de l'inversibilité de 2 dans k.

Références

[1] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, Princeton, 1956.

[2] S. Eilenberg and S. MacLane. Cohomology theory in abstract groups I. *Ann. of Math.*, 48:51–78, 1947.

[3] Z. Fiedorowicz and J.-L. Loday. Crossed simplicial groups and their associated homology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 336:57–87, 1991.

[4] A. G. Gorinov. On the cohomology of double complexes. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 5:54–56, 1997.

[5] V. K. A. M. Gugenheim and L. Lambe. Perturbation theory in differential homological algebra I. *Illinois J. Math.*, 33:566–582, 1989.

[6] P. Gurrola. Cohomologie quaternionique bivariante et caractére de Chern hermitien. *Communication in Algebra*, 22:2039–2055, 1994.

[7] P. Gurrola, 1999. Thèse, Université de Montpellier.

[8] J. D. S. Jones and Chr. Kassel. Bivariant cyclic theory. *K-theory*, 3:339–365, 1989.

[9] Chr. Kassel. Caractère de Chern bivariant. *K-theory*, 3:367–400, 1989.

[10] Chr. Kassel. Homologie cyclique, caractère de Chern et lemme de perturbation. *J. Reine Angew. Math.*, 408:159–180, 1990.

[11] R. L. Krasauskas. Quelque applications topologiques de l'homologie diédrale. Thèse, Université de Moscou, 1987.

[12] R. L. Krasauskas, S. V. Lapin, and Yu. P. Soloviev. Dihedral homology and cohomology. Basic concept and construction. *Mat. Sb.*, 133:25–48, 1987.

[13] Th. Lambre. Quelque exemples de lemmes de première perturbation en homologie cyclique. *Communication in Algebra*, 23:525–541, 1995.

[14] J.-L. Loday. Homologies diédrale et quaternionique. *Advances in Mathematics*, 66:119–148, 1987.

[15] J.-L. Loday. *Cyclic homology.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Nikolay V. Solodov
Université Lomonosov
Faculté de Mécanique
et de Mathématiques
Leninskie Gory
119992 Moscou
RUSSIE
porfirion@yandex.ru