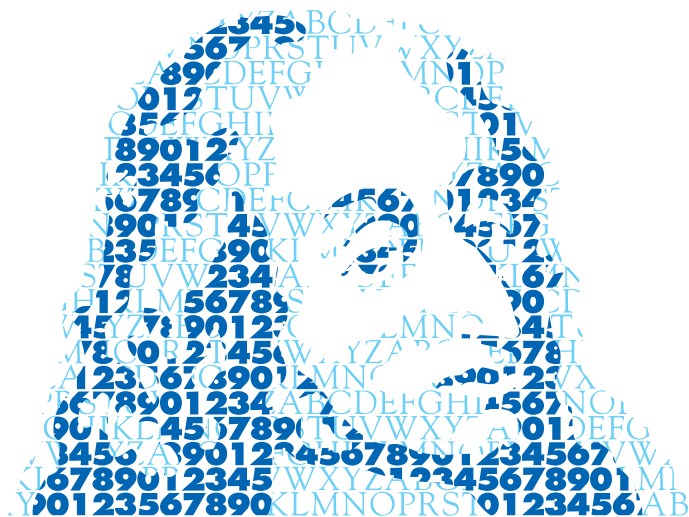


# ANNALES MATHÉMATIQUES



## BLAISE PASCAL

MICHEL CROUZEIX

### Une famille d'inégalités pour les ensembles convexes du plan

Volume 12, n°2 (2005), p. 223-230.

[http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP\\_2005\\_\\_12\\_2\\_223\\_0](http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2005__12_2_223_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques  
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS  
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# Une famille d'inégalités pour les ensembles convexes du plan

Michel Crouzeix

## Résumé

Nous considérons une famille de fonctions ne dépendant que de la forme d'un ensemble convexe du plan. Nous en donnons des majorations faisant intervenir le plus petit rapport des rayons des couronnes qui contiennent la frontière de ce convexe.

## 1 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert convexe borné et non vide du plan  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ . Si  $\omega \in \Omega$ , il existe une fonction  $2\pi$ -périodique  $\rho_\omega(\cdot; \Omega)$  telle que

$$\Omega = \{\omega + r e^{i\varphi}; 0 \leq r < \rho_\omega(\varphi; \Omega), \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

On se donne par ailleurs une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que l'on suppose paire et convexe, et on considère la fonctionnelle  $J$  définie par

$$J(\Omega) := \inf_{\omega \in \Omega} \int_0^{2\pi} g\left(\frac{\rho'_\omega(\varphi; \Omega)}{\rho_\omega(\varphi; \Omega)}\right) d\varphi.$$

Il est clair que  $J(\Omega)$  ne dépend que de la forme de  $\Omega$  (i.e.  $J(\Omega)$  est invariant par similitude directe ou indirecte sur  $\Omega$ ). On considère enfin la fonction  $j$  définie sur l'intervalle  $[1, \infty[$  par  $j(1) = 2\pi g(0)$  et, si  $y > 1$ , par

$$j(y) := 2n \int_0^\gamma g(\operatorname{tg}(\varphi)) d\varphi + 2 \int_0^{\pi-n\gamma} g(\operatorname{tg}(\varphi)) d\varphi,$$

où  $\gamma = \arccos \frac{1}{y}$  et  $n$  est le plus grand entier tel que  $\gamma < \frac{\pi}{n}$ .

Le but de cet article est de montrer le résultat

$$j(y) = \max\{J(\Omega); \exists \omega_0 \text{ et } r > 0 \text{ tel que } \partial\Omega \subset C(\omega_0, r, y)\}, \quad (1.1)$$

le maximum étant pris sur tous les ensembles convexes bornés du plan dont la frontière est contenue dans une couronne fermée

$$C(\omega_0, r, y) := \{z \in \mathbb{C}; r \leq |z - \omega_0| \leq r y\}.$$

Il est facile de voir que  $j$  est une fonction continue et croissante. L'estimation (1.1) nous fournit donc une majoration de  $J(\Omega)$  en fonction du (plus petit) rapport  $y$  des rayons des couronnes qui contiennent la frontière de  $\Omega$ . Nous verrons de plus que ce maximum est atteint pour des polygones.

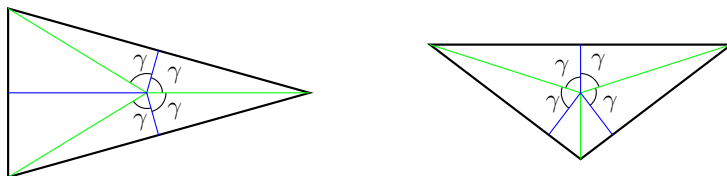
## 2 Borne dans une couronne

Dans ce paragraphe, nous supposons que la frontière du convexe  $\Omega$  est contenue dans la couronne  $C(0, 1, y)$  centrée à l'origine. Nous considérons la quantité

$$G(\Omega) := \int_0^{2\pi} g\left(\frac{\rho'_0(\varphi; \Omega)}{\rho_0(\varphi; \Omega)}\right) d\varphi.$$

**Lemme 2.1:** *Soit  $y > 1$  et soit  $n$  le plus grand entier tel que  $y \cos \frac{\pi}{n} < 1$ . Alors, sous les contraintes  $\Omega$  convexe et  $\partial\Omega \subset C(0, 1, y)$ , le maximum de  $G(\Omega)$  est atteint dans la famille des polygones à  $n+1$  côtés, et vaut  $j(y)$ .*

DÉMONSTRATION: Pour fixer les idées, nous considérons d'abord le cas  $y \geq 2$ , c'est à dire  $\gamma = \arccos \frac{1}{y} \geq \frac{\pi}{3}$ . On a donc  $n = 2$ , et la quantité  $j(y)$  est réalisée par les deux triangles suivants :



On en déduit

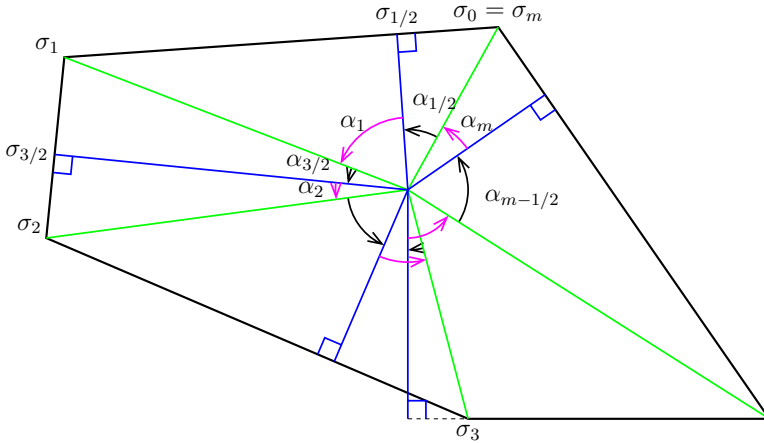
$$\max G(\Omega) \geq j(y) = 4 \int_0^\gamma g(\operatorname{tg}(\varphi)) d\varphi + 2 \int_0^{\pi-2\gamma} g(\operatorname{tg}(\varphi)) d\varphi.$$

Il reste à montrer que l'on a  $G(\Omega) \leq j(y)$ . Nous allons le faire sous les hypothèses additionnelles: la fonction  $g$  est strictement convexe, de classe

## INÉGALITÉS SUR LES CONVEXES

$C^1$ , et l'ensemble convexe  $\Omega$  est un polygone à  $m \leq m_0$  côtés (avec  $m_0 \geq 3$  fixé, arbitrairement grand). Un argument de passage à la limite permet facilement de lever ces restrictions.

On considère donc un polygone convexe  $\Omega$ , et on utilise les notations correspondant à la figure suivante (avec une numérotation modulo  $m$ )



On numérote (dans le sens positif)  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m = \sigma_0$  les sommets du polygone, et on note  $\sigma_{j+1/2}$  le pied de la hauteur menée de l'origine  $O$  sur le côté  $(\sigma_j, \sigma_{j+1})$ . On choisira la numérotation de sorte que  $|\sigma_{1/2}|$  soit minimum, et on notera  $\alpha_j$  (respectivement  $\alpha_{j+1/2}$ ) l'argument de  $\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1/2}}$  (resp.  $\frac{\sigma_{j+1/2}}{\sigma_j}$ ). Sans perte de généralité, on peut supposer que  $|\sigma_{1/2}| = 1$ .

Notons que l'on a alors

$$G(\Omega) = \sum_{k=1}^{2m} \int_0^{\alpha_{k/2}} g(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi. \quad (2.1)$$

Le polygone  $\Omega$  est déterminé de manière unique par la donnée de  $\sigma_{1/2}$  vérifiant  $|\sigma_{1/2}| = 1$  et des angles  $\alpha_j \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  satisfaisant les contraintes

$$\sum_{k=1}^{2m} \alpha_{k/2} = 2\pi, \quad \sum_{j=1}^m \log \frac{\cos \alpha_{j-1/2}}{\cos \alpha_j} = 0. \quad (2.2)$$

Les autres contraintes sur  $\Omega$  se traduisent par

$$\alpha_{j-1/2} + \alpha_j > 0, \quad \alpha_j + \alpha_{j+1/2} > 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (2.3)$$

$$\log \frac{1}{\cos \alpha_1} + \sum_{j=1}^{k-1} \log \frac{\cos \alpha_{j+1/2}}{\cos \alpha_{j+1}} \leq \log y, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^k \log \frac{\cos \alpha_{j+1/2}}{\cos \alpha_j} \geq 0, \quad 1 \leq k \leq m-1. \quad (2.5)$$

La première inégalité de (2.3) signifie que les sommets sont numérotés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, la seconde que  $\Omega$  est convexe. Notons que le membre de gauche de l'inégalité (2.4) vaut  $\log \left| \frac{\sigma_k}{\sigma_{1/2}} \right|$  et celui de (2.5) vaut  $\log \left| \frac{\sigma_{k+1/2}}{\sigma_{1/2}} \right|$ , de sorte que ces inégalités correspondent respectivement à  $|\sigma_k| \leq y$  et à  $|\sigma_{k+1/2}| \geq 1$ .

Nous supposons maintenant que les données  $\alpha$  correspondent à un polygone  $\Omega$  qui réalise le maximum de  $G(\Omega)$  parmi tous les polygones convexes à  $m$  côtés satisfaisant les contraintes précitées; par compacité, il est clair que (pour un  $m \leq m_0$ ) un tel polygone existe. On considère deux entiers  $1 \leq k < \ell \leq 2m+1$  tels que

$$|\sigma_{k/2}| = y \text{ ou } 1, \quad |\sigma_{\ell/2}| = y \text{ ou } 1, \quad 1 < |\sigma_{j/2}| < y, \quad \text{si } k < j < \ell.$$

Pour un tel couple, qui existe nécessairement, on peut avoir les occurrences suivantes :

1<sup>er</sup> cas.  $\ell = k + 1$ . Alors nécessairement  $\alpha_{\ell/2} = \gamma$ .

2<sup>ème</sup> cas.  $\ell = k + 2$ . Alors nécessairement  $0 < \alpha_{(k+1)/2} = \alpha_{\ell/2} < \gamma$ . Notons que ce cas se présente au plus une fois. En effet, supposons qu'il y ait deux tels couples  $(k, \ell = k + 2)$ ,  $(r, s = r + 2)$ , avec par exemple  $\alpha_{\ell/2} = \alpha_{(r-1)/2} \geq \alpha_{s/2} = \alpha_{(s-1)/2}$ . Soit alors  $\Omega_\varepsilon$  l'ouvert convexe correspondant à  $\alpha^\varepsilon$  défini par

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell/2}^\varepsilon &= \alpha_{(\ell-1)/2}^\varepsilon = \alpha_{\ell/2} + \varepsilon, & \alpha_{s/2}^\varepsilon &= \alpha_{(s-1)/2}^\varepsilon = \alpha_{s/2} - \varepsilon, \\ \alpha_{k/2}^\varepsilon &= \alpha_{k/2}, & & \text{pour les autres valeurs de l'indice } k. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que  $\Omega^\varepsilon$  satisfait aux contraintes exigées (pour  $\varepsilon > 0$  assez petit) mais on a, compte-tenu de la croissance stricte de  $g$ ,

$$G(\Omega^\varepsilon) - G(\Omega) = 2 \left( \int_{\alpha_{\ell/2}}^{\alpha_{\ell/2} + \varepsilon} g(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi - \int_{\alpha_{s/2} - \varepsilon}^{\alpha_{s/2}} g(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi \right) > 0.$$

INÉGALITÉS SUR LES CONVEXES

On est donc en contradiction avec l'hypothèse de maximalité de  $G(\Omega)$ .

3<sup>ème</sup> cas.  $\ell - k \geq 3$ . Notons que l'on a nécessairement  $0 < \alpha_{(k+1)/2} < \gamma$ . On introduit  $\tau_1 = \alpha_{(k+1)/2}$ ,  $\tau_2 = \alpha_{(k+2)/2}$ ,  $\tau_3 = \alpha_{(k+3)/2}$ . On écrit alors que  $G(\Omega) \geq G(\Omega')$ , pour tout polygone  $\Omega'$  correspondant aux angles  $\alpha'$  vérifiant

$$\alpha'_{j/2} = \alpha_{j/2}, \quad \text{si } j \notin \{k+1, k+2, k+3\}.$$

Les contraintes actives pour  $\Omega'$  au voisinage de  $\Omega$  sont alors les égalités (2.2) ; elles se réécrivent ici (avec des notations évidentes)

$$\begin{aligned} \tau'_1 + \tau'_2 + \tau'_3 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \\ \log \frac{1}{\cos \tau'_1} + \log \frac{\cos \tau'_2}{\cos \tau'_3} &= \log \frac{1}{\cos \tau_1} + \log \frac{\cos \tau_2}{\cos \tau_3}. \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité  $G(\Omega) \geq G(\Omega')$  impliquent

$$g(\text{tg } \tau_j) + \lambda - \mu(-1)^j \text{tg } \tau_j = 0, \quad \text{pour } j = 1, 2, 3,$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les multiplicateurs de Lagrange correspondant aux contraintes actives. Il résulte de la stricte convexité de la fonction  $g$  que l'équation  $g(t) + \lambda - \mu t = 0$ , a au plus deux racines. Comme on a de plus  $\tau_1 + \tau_2 > 0$  et  $\tau_2 + \tau_3 > 0$ , on en déduit  $\tau_1 = \tau_3 \neq -\tau_2$ .

Posons maintenant  $\delta_j = \tau'_j - \tau_j$ . Les contraintes entraînent

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 &= 0, \\ (\delta_1 + \delta_3) \text{tg } \tau_1 - \delta_2 \text{tg } \tau_2 + \frac{\delta_1^2 + \delta_3^2}{2 \cos^2 \tau_1} - \frac{\delta_2^2}{2 \cos^2 \tau_2} &= O(|\delta|^3). \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a  $\delta_2 = O(|\delta|^2)$  et

$$\begin{aligned} (\delta_1 + \delta_3)(\text{tg } \tau_1 + \text{tg } \tau_2) &= -\frac{\delta_1^2 + \delta_3^2}{2 \cos^2 \tau_1} + O(|\delta|^3), \\ \delta_2(\text{tg } \tau_1 + \text{tg } \tau_2) &= \frac{\delta_1^2 + \delta_3^2}{2 \cos^2 \tau_1} + O(|\delta|^3), \end{aligned}$$

On développe maintenant  $G(\Omega') - G(\Omega)$  et on obtient

$$\begin{aligned} G(\Omega') - G(\Omega) &= \sum_{j=1}^3 \int_{\tau_j}^{\tau'_j} g(\text{tg } \varphi) d\varphi \\ &= (\delta_1 + \delta_3)g(\text{tg } \tau_1) + \delta_2 g(\text{tg } \tau_2) + \frac{g'(\text{tg } \tau_1)}{2 \cos^2 \tau_1} (\delta_1^2 + \delta_3^2) + o(|\delta|^2) \\ &= \frac{\delta_1^2 + \delta_3^2}{2 \cos^2 \tau_1 (\text{tg } \tau_1 + \text{tg } \tau_2)} [g(\text{tg } \tau_2) - g(\text{tg } \tau_1) + g'(\text{tg } \tau_1)(\text{tg } \tau_1 + \text{tg } \tau_2)] \\ &\quad + o(|\delta|^2). \end{aligned}$$

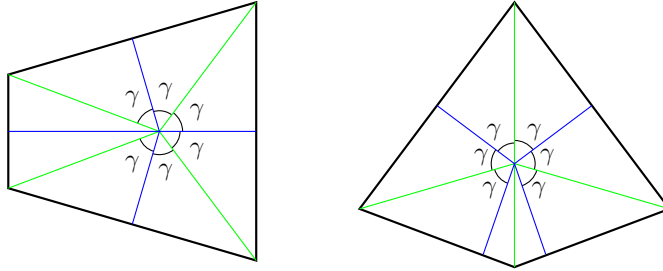
La fonction  $g$  étant convexe et paire, on en déduit

$$g(\operatorname{tg} \tau_2) = g(-\operatorname{tg} \tau_2) > g(\operatorname{tg} \tau_1) + g'(\operatorname{tg} \tau_1)(-\operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_1).$$

On a donc (si  $\delta \neq 0$ )  $G(\Omega') > G(\Omega)$ , ce qui contredit l'optimalité de  $\Omega$ . Ce cas est donc impossible.

Les seuls cas possibles sont donc  $\alpha_{j/2} = \gamma$ , sauf peut-être pour deux valeurs de  $j$  qui sont alors successives et qui correspondent à deux angles égaux. Cela implique  $m = 3$  et n'est possible que pour les triangles donnés par la première figure.

La démonstration est identique pour les autres valeurs  $n > 2$ , mais on a alors  $m = n + 1$ . La figure suivante montre les deux sortes de configurations optimales arrivant pour  $n = 3$ .



□

### 3 L'optimalité

On déduit du lemme précédent, et de l'invariance de  $J(\Omega)$  par similitude, que l'on a  $J(\Omega) \leq j(y)$  dès que la frontière  $\partial\Omega$  est contenue dans une couronne  $C(\omega_0, r, y)$ . Pour montrer l'optimalité de cette majoration, c'est-à-dire la relation (1.1), il suffit d'exhiber un exemple de convexe  $\Omega$  pour lequel on a

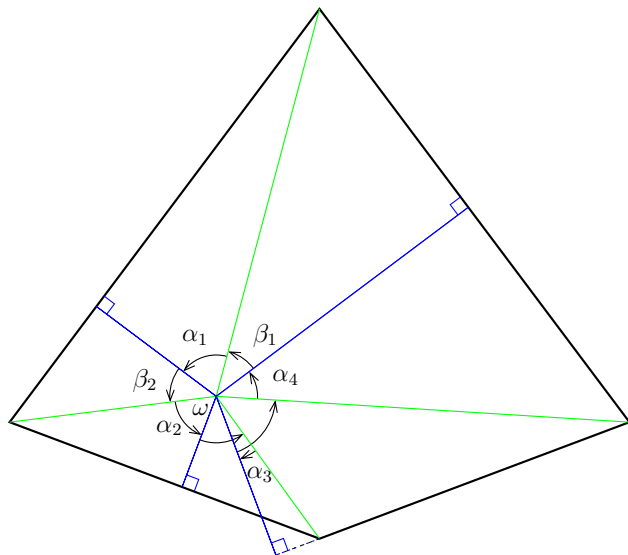
$$J(\Omega) = j(y) \quad \text{et} \quad \partial\Omega \subset C(0, 1, y).$$

Nous allons nous limiter à considérer le cas  $n = 3$ , la généralisation aux autres cas étant immédiate.

## INÉGALITÉS SUR LES CONVEXES

On choisit pour cela le quadrilatère  $\Omega$  correspondant à la configuration de droite de la figure précédente et, pour  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$G_\omega(\Omega) := \int_0^{2\pi} g\left(\frac{\rho'_\omega(\varphi; \Omega)}{\rho_\omega(\varphi; \Omega)}\right) d\varphi.$$



Avec les notations de cette nouvelle figure (notons que l'angle  $\alpha_3$  y est négatif), on a

$$G_\omega(\Omega) = \sum_{k=1}^4 \left( \int_0^{\beta_k} g(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi + \int_0^{\alpha_k} g(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi \right) \quad \text{et} \quad G_0(\Omega) = j(y).$$

On remarque que  $(\alpha_1 + \beta_1)/2 = (\alpha_2 + \beta_2)/2 = (\alpha_4 + \beta_4)/2 = \gamma$  et  $(\alpha_3 + \beta_3)/2 = \pi - 3\gamma$ . On en déduit

$$G_\omega(\Omega) - G_0(\Omega) = \sum_{j=1}^4 \left( H(\alpha_j) + H(\beta_j) - 2H\left(\frac{\alpha_j + \beta_j}{2}\right) \right),$$

$$\text{avec} \quad H(\theta) := \int_0^\theta g(\operatorname{tg} \varphi) d\varphi.$$



Il résulte de la remarque ci-après que chacun des termes de la somme est positif ou nul. On a donc

$$G_0(\Omega) = \min_{\omega \in \Omega} G_\omega(\Omega),$$

c'est-à-dire  $j(y) = J(\Omega)$ .

**Remarque 3.1:** On suppose  $x > 0$ ,  $x+t$  et  $x-t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on a alors

$$H(x+t) + H(x-t) - 2H(x) \geq 0.$$

En effet, on a  $H''(\theta) = g'(\operatorname{tg} \theta)(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$ ; cette dérivée seconde est donc impaire et croissante. D'après la formule de Taylor, il existe  $s \in ]0, t[$  tel que

$$\begin{aligned} H(x+t) + H(x-t) - 2H(x) &= \frac{t^2}{2} (H''(x+s) + H''(x-s)) \\ &= \frac{t^2}{2} (H''(s+x) - H''(s-x)) \geq 0, \end{aligned}$$

puisque  $H''$  est croissante.

Pour conclure, on considère l'exemple correspondant au choix  $g(t) = |t|$ . Si on désigne par  $y$  le plus petit des rapports (grand/petit) des rayons des couronnes contenant le bord du convexe, et si on suppose  $y \geq 2$ , notre majoration devient

$$\inf_{\omega \in \Omega} \operatorname{TV}(\log \rho_\omega(\cdot, \Omega)) \leq 2 \log \frac{y^4}{y^2 - 2},$$

où  $\operatorname{TV}(f)$  désigne la variation totale de la fonction  $f$  prise sur le bord de  $\Omega$ .

MICHEL CROUZEIX  
 UNIVERSITÉ DE RENNES 1  
 IRMAR, UMR 6625  
 CAMPUS DE BEAULIEU  
 35042 RENNES CEDEX  
 FRANCE  
 michel.crouzeix@univ-rennes1.fr