ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Salah Eddine Allaoui

Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles

Volume 16, n° 2 (2009), p. 399-429.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_2_399_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **16**, 399-429 (2009)

Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles

Salah Eddine Allaoui

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse aux opérateurs de composition $T_f(g) := f \circ g$ sur certains espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Dans le but de caractériser les fonctions qui opèrent, on établit que la condition de Lipschitz, locale ou globale suivant que l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se plonge ou non dans $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, est nécessaire pour $s > 0$, et que l'appartenance locale au même espace l'est aussi pour $m \leq n$. Nous étudions enfin la régularité de l'opérateur T_f.

Remarks on the symbolic calculus in vector valued Besov spaces

Abstract

We are interested in the superposition operators $T_f(g) := f \circ g$ on vector valued Besov and Lizorkin-Triebel spaces of positive smoothness exponent s. As a first step towards the characterization of functions which operate, we establish that the local Lipschitz continuity of f is necessary if the space $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ or $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ is imbedded into $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, and that the uniform Lipschitz continuity of f is necessary if the space is not imbedded into $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. We prove also that the local membership to the same space is necessary for $m \leq n$. We finally study the regularity of the superposition operator T_f.

1. Introduction

Nous considérons le calcul symbolique pour les espaces de Besov et de Lizorkin -Triebel à valeurs vectorielles $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, avec $p, q \in [1, +\infty]$ dans le cas de l'espace de Besov, $q \in [1, +\infty]$ et $p \in [1, +\infty[$ dans le cas de l'espace de Lizorkin-Triebel. Nous posons

Mots-clés : Lizorkin-Triebel spaces, Besov spaces, Continuity and differentiability of superposition operators.
Classification math. : 46E35, 47H30.

$E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) := B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, quand il n'y a pas besoin de distinguer les espaces B et F.
On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. On montrera que les conditions de Lipschitz sont nécessaires pour $s>0$, résultat déjà obtenu par Bourdaud [3] dans le cas $m=1$.

On sait que le calcul fonctionnel est trivial dans la zone $1+\dfrac{1}{p}\le s<\dfrac{n}{p}$, voir [1], [2] et le théorème 3.3. Le phénomène de trivialité étant dû à l'existence de fonctions non bornées dans les espaces concernés, il est naturel de considérer les espaces

$$\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) := E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cap L_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\,.$$

Le second objectif est ici de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la régularité du calcul symbolique sur l'espace $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ pour $s>0$, qui généralisent les résultats obtenus pour $m=1$ par Bourdaud et Lanza de Cristoforis [4].
Remerciements. Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide et les encouragements de Gérard Bourdaud. C'est un plaisir pour moi de le remercier. Je remercie également l'équipe d'analyse fonctionnelle de Institut de Mathématiques de Jussieu qui m'a accueilli pendant la préparation de cet article.

Notation 1.1. Nous notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $x.y=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, $|x|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, Q le cube unité $[-1/2,1/2]^n$ et Q^+ le cube $[0,1/2]^n$. Si R est un cube de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\frac{1}{2}R$ le cube ayant le même centre que R et de rayon moitié. On note φ une fonction de classe C^∞ telle que $0\le\varphi\le 1$, $\varphi(x)=1$ sur Q, et $\varphi(x)=0$ hors de $2Q$. Nous introduisons l'opérateur de composition T_f, sa version locale S_f, l'opérateur de translation τ_h et l'opérateur de différence finie Δ_h, définis sur les fonctions (ou les distributions) via les formules $T_f(g):=f\circ g$, $S_f(g):=\varphi(f\circ g)$, $(\tau_hf)(x):=f(x-h)$ et $\Delta_hf:=\tau_{-h}f-f$. Si $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous notons $g(D)$ l'opérateur pseudodifférentiel de symbole g, défini sur les distributions tempérées par

$$\widehat{g(D)f} := g\widehat{f} \quad ,\ \forall f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,,$$

où $\widehat{f}$ la transformation de Fourier de f. Nous notons p' l'exposant conjugué de p, i.e. $p' := \dfrac{p}{p-1}$. Nous notons $\mathbb{B}(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r. Dans un espace topologique E, on note $\mathrm{cl}_E(A)$ la fermeture d'un sous-ensemble A. Comme d'habitude $c, c_1, \ldots$ désignera une constante positive pouvant dépendre de m, n, s, p, q et de la fonction φ ; sa valeur pourra changer d'une occurrence à l'autre.

Plan. La deuxième section est consacrée à des rappels sur les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel. Dans la troisième, nous énonçons et prouvons des conditions nécessaires sur $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pour que T_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Dans la section 4, nous donnons des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour la régularité de l'opérateur T_f sur l'espace $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. La dernière section est consacrée aux problèmes ouverts.

2. Définitions et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

2.1. La décomposition Littlewood-Paley classique

Rappelons les définitions des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel suivant le formalisme de Littlewood-Paley. On pose

$$\gamma(x) := \varphi(x) - \varphi(2x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Alors γ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ et de plus :

$$\varphi(x) + \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j}x) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions γ et φ dépendent clairement de n. Dans le cas où n prend plusieurs valeurs, nous utiliserons une notations indicielle, i.e. φ_n et γ_n.

Nous définissons les opérateur Q_j sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, par

$$Q_j := \gamma(2^{-j}D) \quad (j \geq 1), \qquad Q_0 := \varphi(D) .$$

Définition 2.1. Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$. Les espaces $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, sont déterminés respectivement par

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q \right)^{1/q} < +\infty \,,$$

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} |Q_j f|)^q \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty \,,$$

avec la modification usuelle dans le cas $q = \infty$. Dans le cas Lizorkin-Triebel, on suppose toujours $p < \infty$.

Définition 2.2. Pour $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, on définit $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ qui vérifient

$$\|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} := \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < +\infty \,.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, on définit l'espace $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, f telles que

$$\|f\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} + \|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} < +\infty \,.$$

On pose $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) := E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Définition 2.3. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On dit que φ opère par multiplication sur $E \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si $\varphi f \in E$ pour tout $f \in E$.

Définition 2.4. Soit E un espace de Banach de distributions dans $\mathbb{R}^n$; on dit que E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module si tout élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ opère par multiplication sur E.

Il est bien connu que les espaces $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sont des $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$modules.

2.2. Une variante de la décomposition de Littlewood-Paley

Dans certains cas, il est utile de remplacer les fonctions standard γ et φ par des fonctions produits tensoriels. Nous donnons ici la construction relative à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Pour toutes fonctions f, g définies sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{n-m}$, respectivement, on pose

$$(f \otimes g)(t, x) := f(t) g(x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \,.$$

Définissons

$$u_0 := \varphi_m \otimes \varphi_{n-m}, \qquad u_1 := \varphi_m(2(.)) \otimes \gamma_{n-m}, \qquad u_2 := \gamma_m \otimes \varphi_{n-m}\,.$$

Alors nous avons

$$u_0(t,x) - u_0(2t,2x) = u_1(t,x) + u_2(t,x), \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}\,.$$

Nous définissons les opérateurs U_0 et $U_{\alpha,j}$ $(j \geq 1\,, \alpha = 1,2)$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, par

$$U_{\alpha,j} := u_\alpha(2^{-j}D), \qquad U_0 := u_0(D)\,.$$

Proposition 2.5. *Soient* $1 \leq m < n$ *et* $s \in \mathbb{R}$. *Alors une distribution tempérée* f *appartient à* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si*

$$\|U_0 f\|_p + \sum_{\alpha=1,2} \left(\sum_{j\geq 1} (2^{sj} \|U_{\alpha,j} f\|_p)^q \right)^{1/q} < +\infty\,,$$

$$\|U_0 f\|_p + \sum_{\alpha=1,2} \left\| \left(\sum_{j\geq 1} (2^{sj} |U_{\alpha,j} f|)^q \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty\,,$$

et les expressions ci-dessus sont des normes équivalentes sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *respectivement.*

Démonstration. Voir par exemple Triebel [10, Prop. 2.3.2/1, p. 46], [11, chap. 2] ou Peetre [8, chap. 8]. □

Proposition 2.6. *Soient* $1 \leq m < n$ *et* $s > 0$.

– *Si* $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ *et* $g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n-m})$, *alors* $f \otimes g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|f \otimes g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} \, \|g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n-m})}\,. \tag{2.1}$$

– *Supposons que* $f \otimes g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et que* g *est une fonction non nulle*
  – *appartenant à* $L_p(\mathbb{R}^{n-m})$, *dans le cas Besov,*
  – *bornée uniformément continue, dans le cas Lizorkin-Triebel.*

  Alors il existe une constante $c(g) > 0$ *telle que*

$$\|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} \leq c(g) \, \|f \otimes g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.2}$$

Démonstration. On munit l'espace $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ des normes équivalentes données dans la proposition 2.5. Dans toute la preuve, on supposera, sans perte de généralité, que $f \neq 0$.

Étape 1 : le cas Besov. Nous avons

$$\|f\otimes g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_m(D)f\|_p\|\varphi_{n-m}(D)g\|_p +$$
$$\left(\sum_{j\geq 1}(2^{sj}\|u_1(2^{-j}D)f\otimes g\|_p)^q\right)^{1/q} + \left(\sum_{j\geq 1}(2^{sj}\|u_2(2^{-j}D)f\otimes g\|_p)^q\right)^{1/q}.$$
$$= \|Q_0f\|_p\|Q_0g\|_p + \left(\sum_{j\geq 1}(2^{sj}\|\varphi_m(2^{1-j}D)f\|_p\|Q_jg\|_p)^q\right)^{1/q}$$
$$+ \left(\sum_{j\geq 1}(2^{sj}\|\varphi_{n-m}(2^{-j}D)g\|_p\|Q_jf\|_p)^q\right)^{1/q}.$$

En utilisant le plongement

$$E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad \forall s>0, \tag{2.3}$$

et le fait que les opérateurs $\varphi(2^{-j}D)$ sont bornés sur L_p, uniformément par rapport à j, nous obtenons l'inégalité (2.1) dans le cas Besov.

Soit g une fonction non nulle dans $L_p(\mathbb{R}^{n-m})$. On a

$$\lim_{j\to\infty}\varphi_{n-m}(2^{-j}D)g = g \quad \text{dans} \quad L_p(\mathbb{R}^{n-m}),$$

donc il existe j_0 tel que

$$\|\varphi_{n-m}(2^{-j}D)g\|_p \geq \frac{1}{2}\|g\|_p, \quad \forall j>j_0 .$$

Donc on obtient

$$\frac{1}{2}\|g\|_p\left(\sum_{j>j_0}(2^{sj}\|Q_jf\|_p)^q\right)^{1/q} \leq \|f\otimes g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

Et d'autre part on a

$$\|Q_jf\|_p \leq c_1\|f\|_p \leq \frac{c_2}{\|g\|_p}\|f\otimes g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

Donc

$$\left(\sum_{j=0}^{j_0}(2^{sj}\|Q_jf\|_p)^q\right)^{1/q} \leq \frac{c2^{sj_0}}{\|g\|_p}\|f\otimes g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

D'où l'inégalité (2.2).

Étape 2 : le cas Lizorkin-Triebel. Nous avons

$$\|f \otimes g\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|Q_0 f\|_p \|Q_0 g\|_p + \left\| \left(\sum_{j\geq 1} \left|2^{sj} \varphi_m(2^{1-j}D) f \otimes Q_j g\right|^q \right)^{1/q} \right\|_p + \left\| \left(\sum_{j\geq 1} \left|2^{sj} Q_j f \otimes \varphi_{n-m}(2^{-j}D) g\right|^q \right)^{1/q} \right\|_p .$$

On a

$$\sum_{0\leq\alpha\leq j-1} Q_\alpha f(t) = \varphi_m(2^{1-j}D) f(t) .$$

Par la condition $s > 0$, cela implique

$$|(\varphi_m(2^{1-j}D)f)(t)| \leq c \left(\sum_{k\geq 0} \left|2^{sk} Q_k f(t)\right|^q \right)^{1/q}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^m , \forall j \geq 1 .$$

Alors on obtient

$$\left\| \left(\sum_{j\geq 1} \left|2^{sj} \varphi_m(2^{1-j}D) f \otimes Q_j g\right|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} \, \|g\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n-m})} .$$

En raisonnant de la même façon pour les autres termes, on termine la preuve de (2.1) dans le cas Lizorkin-Triebel.
Soit g une fonction non nulle et uniformément continue. On a

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{n-m}(2^{-j}D) g = g \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}^{n-m} ,$$

donc il existe une boule $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{R}^{n-m}$, un nombre $r > 0$, et un entier j_0, tels que

$$|\varphi_{n-m}(2^{-j}D) g(x)| \geq r, \quad \forall x \in \mathbb{B} , \forall j > j_0 .$$

Il vient

$$\left\| \left(\sum_{j>j_0} \left|2^{sj} Q_j f \otimes \varphi_{n-m}(2^{-j}D) g\right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \geq r |\mathbb{B}|^{1/p} \left\| \left(\sum_{j>j_0} \left|2^{sj} Q_j f\right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^m)} .$$

Par hypothèse on a $f \otimes g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ donc $f \otimes g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, grâce au plongement (2.3). Cela donne $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ et $g \in L_p(\mathbb{R}^{n-m})$. En utilisant le plongement $\ell^1 \hookrightarrow \ell^q$, pour $q \geq 1$, il vient

$$\left(\sum_{0 \leq j \leq j_0} \left| 2^{sj} Q_j f(t) \right|^q \right)^{1/q} \leq c \sum_{0 \leq j \leq j_0} \left| 2^{sj} Q_j f(t) \right| \quad , \forall t \in \mathbb{R}^m .$$

En prenant les normes $L_p(\mathbb{R}^m)$, il vient

$$\left\| \left(\sum_{0 \leq j \leq j_0} \left| 2^{sj} Q_j f(t) \right|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c_1 \|f\|_p \leq \frac{c_2}{\|g\|_p} \|f \otimes g\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

D'où le résultat. □

2.3. Autres normes équivalentes

Proposition 2.7. *Soit* $0 < s < \ell$ *avec* ℓ *entier. Une distribution* f *appartient à* $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$N_{p,\ell}(f) := \sup_{0<t\leq 1} t^{-s} \omega_{p,\ell}(f;t) < +\infty ,$$

où $\omega_{p,\ell}(f;t) := \sup_{|h| \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^\ell_h f(x)|^p dx \right)^{1/p}$. *De plus* $\|f\|_p + N_{p,\ell}(f)$ *est une norme équivalente dans* $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Voir par exemple Triebel [11, Th. 2.6.1, p. 140]. □

Proposition 2.8. *Soit* $s > 0$. *Une distribution* f *appartient à* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $\partial_j f \in B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $j = 1, \ldots, n$. *De plus* $\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ *est une norme équivalente dans* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Voir par exemple [9, Prop. 2.1.2/2, p. 19]. □

2.4. Quelques fonctions de test

Lemme 2.9. *Soit* $s > 0$. *Si* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, *il existe une constante* $c = c(u, s, p, q, n) > 0$ *telle que*

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{jk} 2^{j((n/p)-s)} u(2^j(.) - k) \right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} \leq$$

$$c\left(\sum_{j\geq 0}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\alpha_{jk}|^p)^{q/p}\right)^{1/q},$$

$$\left\|\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_{jk}2^{j((n/p)-s)}u(2^j(.)-k)\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\leq$$

$$c\left\|\left(\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(|\alpha_{jk}|\,2^{jn/p}\chi(2^j(.)-k))^q\right)^{1/q}\right\|_p,$$

où χ désigne la fonction caractéristique de Q.

Démonstration. Les estimations résultent des théorèmes (3.1) de [7] et (5.3) de [6], appliqués à chaque fonction coordonnée de u. □

Lemme 2.10. *Pour toute fonction $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, il existe une constante $c=c(u,s,p,q,m,n)>0$ telle que*

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_k u(.-k)\right\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\alpha_k|^p)^{1/p},$$

Démonstration. En faisant $j=0$ dans le lemme 2.9, on a le résultat. □

Lemme 2.11. *On suppose que $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\not\subseteq L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $0<s<\frac{n}{p}$ ou $s=\frac{n}{p}$ et $q>1$ dans le cas Besov, $p>1$ dans le cas Lizorkin-Triebel), alors il existe une suite $(\phi_\nu)_{\nu\geq 1}$ de fonctions de classe C^∞, portées par Q, telles que $\phi_\nu(x)=1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$ et*

$$\lim_{\nu\to+\infty}\|\phi_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}=0.$$

Démonstration. Dans le cas $s<\frac{n}{p}$, on pose $\phi_\nu(x):=\varphi(2^\nu x)$, l'estimation

$$\|\phi_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\leq 2^{-\nu(\frac{n}{p}-s)}\|\varphi\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

permet de conclure.
Supposons maintenant $s=\frac{n}{p}$ et posons

$$\phi_\nu(x):=\nu^{-1}\sum_{1\leq j\leq\nu}\varphi(2^jx).$$

On a donc $\phi_\nu(x) = 1$ sur $2^{-\nu}Q$ et $\phi_\nu(x) = 0$ hors de Q. Le lemme 2.9 donne les inégalités □

$$\|\phi_\nu\|_{B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{(1/q)-1}.$$

De même

$$\|\phi_\nu\|_{F^{n/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{-1} \left\| \sum_{1\leq j\leq \nu} 2^{jn/p}\chi_j \right\|_p ,$$

où χ_j désigne la fonction caractéristique du cube $2^{-j}Q$. Pour estimer la norme L^p qui apparaît au second membre, on pose

$$S_k := 2^{-k}Q \diagdown 2^{-k-1}Q, \quad k = 1, \ldots, \nu - 1,$$

et

$$S_\nu := 2^{-\nu}Q.$$

La fonction $\sum_{1\leq j\leq\nu} 2^{jn/p}\chi_j$ valant constamment $\sum_{1\leq j\leq\nu} 2^{jn/p}$ sur S_k, on obtient

$$\|\phi_\nu\|_{F^{n/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{-1} \left(\sum_{1\leq k\leq\nu} 2^{kn}|S_k| \right)^{1/p} \leq c_1\nu^{(1/p)-1}.$$

Lemme 2.12. *Soient* $s = 1 + \dfrac{1}{p} < \dfrac{n}{p}$ *et* $q > 1$ *dans le cas Besov,* $p > 1$ *dans le cas Lizorkin-Triebel. Alors il existe une suite* $(\omega_\nu)_{\nu\geq 1}$ *de fonctions de classe* C^∞*, portées par* Q*, telle que* $\omega_\nu(x) = x_1$ *pour* $|x_1| \leq 2^{-\nu}$, $|x_j| \leq \frac{1}{2}$ $(j = 2, \ldots, n)$ *et*

$$\|\omega_\nu\|_{B^{1+\frac{1}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{(1/q)-1}, \qquad \|\omega_\nu\|_{F^{1+\frac{1}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{(1/p)-1}.$$

Démonstration. Voir par exemple [2] ou [9, Lem. 5.3.1/2, p. 308]. □

3. Conditions nécessaires pour le calcul symbolique

3.1. Enoncés des théorèmes

Théorème 3.1. *Soient* $s > 0$*,* m *et* n *entiers, et* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$*. Si* T_f *envoie* $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *dans* $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$*, alors* f *est localement lipschitzienne.*

Théorème 3.2. *Soient $s > 0$, m et n entiers, et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. On suppose que $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \nsubseteq L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin- Triebel). Si T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est globalement lipschitzienne.*

Théorème 3.3. *Soient $1 + \frac{1}{p} < s < \frac{n}{p}$, (ou $s = 1 + \frac{1}{p} < \frac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel) et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Si T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est linéaire.*

Remarque 3.4. L'existence de fonctions non triviales opérant sur $B^{1+(1/p)}_{p,1}$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dans le cas où $n > p + 1$, ou sur $F^2_{1,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dans le cas où $n > 2$, est une question ouverte.

Théorème 3.5. *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $1 \le m \le n$, m et n entiers. Si T_f envoie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$.*

3.2. Résultats préliminaires

Lemme 3.6. *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, une fonction s'annulant à l'origine telle que T_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (respectivement $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$) dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication*

$$\|g\| \le \delta \Longrightarrow \|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le M,$$

soit vérifiée par toute fonction g portée par Q, la norme de $\|g\|$ étant calculée respectivement dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Démonstration. Supposons, au contraire, que, pour tout cube R et tous nombres M et δ, on puisse trouver une fonction g, portée par R, telle que

$$\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \le \delta \quad \text{et} \quad \|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} > M.$$

Donnons-nous une suite $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de cubes disjoints et des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $(j \ge 0)$ telles que $\varphi_j(x) = 1$ sur $\frac{1}{2}R_j$ et $\varphi_j(x) = 0$ hors de R_j. On note M_j la norme de l'opérateur $g \mapsto \varphi_j g$, agissant sur $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, et on choisit des fonctions $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $j = 0, 1, \ldots$, telles que

$$supp\, g_j \subset \frac{1}{2}R_j, \quad \|g_j\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \le 2^{-j}, \quad \|f \circ g_j\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} > jM_j.$$

Alors la fonction $g := \sum_{j\geq 0} g_j$ appartient à $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ et on a $\varphi_j(f\circ g) = f\circ g_j$. Donc

$$jM_j \leq \|(f\circ g)\varphi_j\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M_j\|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{pour tout } j,$$

ce qui est absurde. □

Remarque 3.7. Avec la même démonstration on peut établir que l'opérateur S_f a la propriété énoncée dans le lemme 3.6.

Lemme 3.8. *Soient $s>0$, $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$. Supposons que T_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors quel que soit $a\in\mathbb{R}^m$, il existe un opérateur non linéaire $U_a:\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\to B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, et des nombres $\delta, M>0$ tels que*

$$U_ag(x) = f(a+g(x)) - f(a), \forall x\in Q,$$

et

$$\|U_ag\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M\,,$$

pour toute fonction $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, à support dans Q, satisfaisant

$$\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \delta\,.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur non linéaire

$$V_ag(x) := \varphi(x)\,(f(a+g(x)) - f(a)) \quad ,\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

On a alors

$$V_ag(x) = \varphi(x)\,(f(\varphi(x/2)(a+g(x))) - f(\varphi(x/2)a)) \quad ,\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

V_a envoie donc $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et, en raisonnant comme dans la preuve du lemme 3.6, on voit qu'il existe un cube $Q'\subset Q$ et des nombres $\delta, M>0$ tels que

$$\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|V_ag\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M\,,$$

pour toute fonction $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ telle que *supp* $g\subset Q'$.

Posons $Q' = rQ+b$, avec $r>0$ et $b\in\mathbb{R}^n$, et

$$U_ag(x) := V_a\left(g(r^{-1}(.-b)\right)(rx+b) \quad ,\forall x\in\mathbb{R}^n\,.$$

Alors

$$U_ag(x) = \varphi(rx+b)\,(f(a+g(x)) - f(a)) \quad ,\forall x\in\mathbb{R}^n\,.$$

Par l'inclusion $Q'\subset Q$, nous avons $\varphi(rx+b)=1$ sur Q, ce qui termine la preuve. □

Lemme 3.9. *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et*

$$f_{a'} : x \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_m)$$

avec $a' := (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Supposons que T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors l'opérateur $S_{f_{a'}}$, envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Considérons l'opérateur $\Phi : E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \to E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, défini par

$$\Phi(u)(x) = (a_1\varphi(\frac{x}{2}), \ldots, a_{j-1}\varphi(\frac{x}{2}), u(x), a_{j+1}\varphi(\frac{x}{2}), \ldots, a_m\varphi(\frac{x}{2})).$$

Par définition de φ, on a $\varphi(\frac{x}{2}) = 1$ si $\varphi(x) \neq 0$. Il vient donc

$$\varphi(f_{a'} \circ u) = \varphi(f \circ \Phi(u)), \quad \forall u \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Cela montre que l'opérateur $S_{f_{a'}}$ envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Lemme 3.10. *Soit $1 + \frac{1}{p} < s < \frac{n}{p}$, (ou $s = 1 + \frac{1}{p} < \frac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que l'opérateur S_f, envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est une fonction affine.*

Démonstration. Rappelons que S_f vérifie le lemme 3.6, voir la remarque 3.7.

Étape 1 : Le cas $1 + \frac{1}{p} < s < \frac{n}{p}$.

On pose $v(x) = x_1\varphi(x)$. Supposons $a > 0$, suffisamment grand, et $0 < \varepsilon \leq 1$. Nous avons

$$\|av(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq ca\varepsilon^{(n/p)-s}\|v\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

En choisissant

$$\varepsilon = \left(\frac{\delta}{ac\|v\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}}\right)^{\frac{1}{\frac{n}{p}-s}},$$

ce qui est possible si a est assez grand, et en définissant la fonction u par

$$u(x) := av(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

on obtient $\|u\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta$ et $supp\, u \subset 2Q$. On a donc $\|S_f(u)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M$. Nous obtenons

$$S_f(u)(x) = f(\frac{a}{\varepsilon}x_1), \quad \text{sur}\, \varepsilon Q.$$

Fixons ℓ avec $\ell > s$. Pour tout $t \in]0,1]$ on en déduit

$$\Delta^{\ell}_{\varepsilon a^{-1} t e_1} S_f(u)(x) = \Delta^{\ell}_t f(\frac{a}{\varepsilon}x_1), \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{2}Q,$$

pourvu que $a \geq 4\ell$. Par la proposition 2.7, nous obtenons

$$(\varepsilon a^{-1} t)^{-sp} \int_{\frac{\varepsilon}{2}Q} \left|\Delta^{\ell}_{\varepsilon a^{-1} t e_1} S_f(u)(x)\right|^p dx \leq M^p, \qquad \forall t \in]0,1],$$

ce qui donne

$$\int_{|x| \leq \frac{a}{4}} \left|\Delta^{\ell}_t f(x)\right|^p dx \leq M^p \varepsilon^{sp-n} a^{-sp+1}.$$

Compte tenu de la définition de ε, il vient

$$\int_{|x| \leq \frac{a}{4}} \left|\Delta^{\ell}_t f(x)\right|^p dx \leq c a^{-sp+1+p}, \qquad t \in]0,1].$$

En faisant tendre a vers $+\infty$ et en tenant compte de $s > 1 + \dfrac{1}{p}$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Delta^{\ell}_t f(x)\right|^p dx = 0, \qquad \forall t \in]0,1],$$

ainsi f est une fonction polynomiale.

En évaluant l'opérateur S_f sur une fonction de type

$$u(x) = |x|^{\tau} \varphi(x), \quad \text{avec} \quad \tau < 0,$$

et en supposant que $f(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j x^j$ avec $N > 1$ et $c_N \neq 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons

$$S_f(u)(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j |x|^{j\tau} \varphi(x)^{j+1} + c_N |x|^{N\tau} \varphi(x)^{N+1} = A(x) + B(x)$$

On a $A \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si $s < \dfrac{n}{p} + (N-1)\tau$, et d'autre part $B \notin B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ pour $s > \dfrac{n}{p} + N\tau$ (voir [9, Lem. 2.2.3/1, p. 44]).

On choisit donc τ tel que

$$\frac{1}{N-1}(s-\frac{n}{p}) < \tau < \frac{1}{N}(s-\frac{n}{p}).$$

On obtient une contradiction, car S_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. On conclut que $f(x) = c_0 + c_1 x$.

Étape 2 : Le cas $s = 1 + \dfrac{1}{p}$ et $p > 1$. Donnons-nous un grand entier ν dans le lemme 2.12, posons $a = \delta \, \|\omega_\nu\|^{-1}_{E^{1+\frac{1}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ et,

$$u(x) := 2^\nu a \omega_\nu(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \text{avec} \quad \varepsilon \in]0,1],$$

on choisit ε de sorte que

$$\varepsilon = (c^{-1}2^{-\nu})^{\frac{p}{n-p-1}}.$$

On a donc $\|u\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta$ et *supp* $u \subset Q$. Définissons le pavé P par

$$|x_1| < 2^{-\nu-1}\varepsilon, \quad |x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 2, \ldots, n).$$

Soient $t \in]0, \frac{1}{2}]$ et $h = 2^{-\nu}a^{-1}\varepsilon t e_1$, ce qui implique pour tout $x \in P$,

$$\Delta^2_h S_f(u)(x) = \Delta^2_t f(2^\nu \frac{a}{\varepsilon} x_1), \quad \forall x \in P,$$

on a $0 < s < 2$, il vient alors par la proposition 2.8,

$$\|f\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \sim \|f\|_p + \sum_{k=1}^n \|\partial_k f\|_{B^{s-1}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)},$$

et par la proposition 2.7 nous obtenons,

$$\int_P |\Delta_h \partial_1 (S_f u)(x)|^p \, dx \leq M^p |h|, \tag{3.1}$$

il vient alors

$$(2^\nu a \varepsilon^{-1})^p \int_P \left|\Delta_t f'(2^\nu \frac{a}{\varepsilon} x_1)\right|^p dx \leq M^p 2^{-\nu} t a^{-1} \varepsilon,$$

d'où on déduit

$$2^{\nu p} a^p \varepsilon^{n-1-p} \int_{|x| \leq \frac{a}{2}} |\Delta_t f'(x)|^p dx \leq M^p,$$

Compte tenu de la définition de ε, il vient

$$\int_{|x|\le \frac{a}{2}} |\Delta_t f'(x)|^p dx \le c a^{-p}.$$

Quand ν tend vers $+\infty$, il en est de même pour a ; il vient $\Delta_t f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, 1/2]$. Ainsi f' est une constante, ce qu'il fallait démontrer.

Étape 3 : Le cas $s = 2$ et $p = 1$. Examinons maintenant le cas de l'espace $B^2_{1,q}(\mathbb{R}^n)$ $(n > 2, q > 1)$. Le début de la démonstration est inchangé ; l'estimation (3.1) est remplacée par

$$\int_P \left|\Delta_h^2 \partial_1 (S_f u)(x)\right| dx \le M|h|,$$

qui nous conduit à

$$\int_{|x|\le \frac{a}{2}} \left|\Delta_t^2 f'(x)\right| dx \le c a^{-1}.$$

Ainsi f est un polynôme de degré au plus 2 ; en raisonnant comme à la fin de l'étape 1, on conclut que $f(x) = c_0 + c_1 x$. $\square$

3.3. **Preuves des théorèmes 3.1 et 3.2**

Soient b, b' dans $\mathbb{R}^m$, $N \ge 1$ et r, ν qui seront choisis en fonction de b et b'. Nous considérons l'ensemble.

$$A_N := \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \, : \, |k_j| \le N \, , \forall j = 1, \ldots, n\},$$

et nous définissons

$$\varkappa := \frac{1}{2\ell + 1},$$

où ℓ est un entier fixé tel que $\ell > s$, et la fonction

$$g(x) := \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{x}{r} - k\right)\right)(b' - b) + \phi_\nu(x) b \, . \tag{3.2}$$

Le lemme 2.10 donne l'inégalité

$$\left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right)\right\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \le c r^{(n/p)-s} N^{n/p} \, . \tag{3.3}$$

Preuve du théorème 3.1. Supposons que l'opérateur de composition T_f envoie l'espace de Besov $\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (c'est suffisant puisque l'espace $\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se plonge dans tous les $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$). Soit un nombre réel a qui reste fixé dans la suite de la preuve. Alors nous obtenons un opérateur U_a et des constantes δ, M selon le lemme 3.8. On prend $\nu = 1$ et

$$r := \frac{1}{6N}.$$

Puisque $\varkappa < 1/2$, les cubes $r(2\varkappa Q+k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, sont deux à deux disjoints. Par définition de r, nous avons $r(Q+k) \subset Q/2$, pour tout $k \in A_N$. Alors

$$U_a g(x) = f(a+b') - f(a)\,,\text{si } x \in r(\varkappa Q + k) \text{ pour } k \in A_N\,, \tag{3.4}$$

$$U_a g(x) = f(a+b) - f(a)\,,\text{si } x \in (Q/2) \setminus \bigcup_{k \in A_N} r(2\varkappa Q + k)\,. \tag{3.5}$$

Grâce au choix de r, on a

$$c^{-1} r^{s-\frac{n}{p}} N^{-\frac{n}{p}} \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right)\right\|_\infty = c^{-1} 6^{\frac{n}{p}-s} N^{-s} \|\varphi\|_\infty \le c'.$$

On obtient

$$\left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right)\right\|_{\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \le c_1 r^{(n/p)-s} N^{n/p}.$$

En utilisant la relation entre r et N, nous obtenons

$$\|g\|_{\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \le c_2 \left(N^s |b' - b| + |b|\right)\,. \tag{3.6}$$

Maintenant on suppose

$$\max\left(|b|, |b - b'|\right) \le \frac{\delta}{2c_2} \tag{3.7}$$

et on définit N par la propriété :

$$N^s \le \frac{\delta}{2c_2|b - b'|} < (N+1)^s\,.$$

Remarquons que la définition de N implique

$$N^s \ge \frac{\delta}{2^{s+1} c_2 |b - b'|}\,. \tag{3.8}$$

Par la condition (3.7) et par définition de N, nous avons $\|g\|_{\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \delta$. Puisque le support de g est inclus dans Q, on en déduit

$$\|U_a g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M\,. \tag{3.9}$$

Pour tout $x \in r(\varkappa Q^+ + k)$, nous avons

$$x + jr\varkappa e_1 \in r(Q+k)\,, \forall j = 0, \dots, \ell\,,$$

$$x + jr\varkappa e_1 \notin r(2\varkappa Q + k)\,, \forall j = 1, \dots, \ell\,.$$

(3.4) et (3.5) donne aussitôt

$$\left|\Delta^\ell_{r\varkappa e_1}(U_a g)(x)\right| = |f(a+b') - f(a+b)|\,.$$

Par la proposition 2.7, nous obtenons

$$\|U_a g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq (r\varkappa)^{-s}\left(\sum_{k\in A_N}\int_{r(\varkappa Q^+ + k)}\left|\Delta^\ell_{r\varkappa e_1}(U_a g)(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\geq c_3|f(a+b') - f(a+b)|r^{-s}N^{n/p}r^{n/p} = c_4 N^s|f(a+b') - f(a+b)|\,.$$

En prenant en compte les inégalités (3.8) et (3.9), nous voyons que la condition (3.7) implique

$$|f(a+b) - f(a+b')| \leq \frac{2^{s+1}Mc_2}{c_4\delta}|b-b'|\,,$$

qui signifie que f est lipschitzienne dans un voisinage de a. □

Preuve du théorème 3.2. Soit f une fonction satisfaisant l'hypothèse du théoreme 3.2, on se propose de mettre en évidence des constantes $\sigma > 0$ et $K > 0$ telles que $|b' - b| \leq \sigma$ entraîne

$$|f(b') - f(b)| \leq K|b' - b|,$$

quels que soient b et b' dans $\mathbb{R}^m$.

Nous définissons la fonction g suivant (3.2). Les entiers positifs ν et N, ainsi que le nombre $r \in]0,1]$, seront précisés dans un instant. Le lemme 2.11 nous autorise à choisir ν tel que $|b|\,\|\phi_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta/2$, de sorte que N et r devront satisfaire les relations :

$$\delta(3|b'-b|)^{-1} < c_1 r^{(n/p)-s}N^{n/p} \leq \delta(2|b'-b|)^{-1}\,, \tag{3.10}$$

$$rN < 2^{-\nu-2}. \tag{3.11}$$

L'estimation (3.3) et la relation (3.10) entraîneront $\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \delta$. L'inégalité (3.11) nous garantit l'inclusion

$$r(Q+k) \subset 2^{-\nu}Q \text{ pour } k \in A_N \tag{3.12}$$

et par conséquent

$$g(x) = b'\,, \text{si } x \in r(\varkappa Q + k) \text{ pour } k \in A_N\,, \tag{3.13}$$

$$g(x) = b\,, \text{si } x \in 2^{-\nu}Q \setminus \bigcup_{k\in A_N} r(2\varkappa Q + k)\,. \tag{3.14}$$

Pour $s < \dfrac{n}{p}$, il suffit de poser

$$r = (\delta(2c_1|b'-b|)^{-1}N^{-n/p})^{\frac{1}{\frac{n}{p}-s}},$$

alors $rN = c|b'-b|^{\frac{1}{s-\frac{n}{p}}}N^{\frac{s}{s-\frac{n}{p}}}$ est de l'ordre de grandeur de $N^{\frac{s}{s-\frac{n}{p}}}$; l'hypothèse $0 < s < \dfrac{n}{p}$, un choix convenable $N = N(\delta, |b'-b|)$ permet d'avoir (3.11) . Supposons maintenant $s = \dfrac{n}{p}$.

Si $|b'-b| \leq \dfrac{\delta}{3}$, il est possible de trouver un entier $N \geq 1$ tel qu'on ait (3.10), on choisit alors r assez petit pour avoir (3.11). Il vient alors

$$\|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Pour tout $x \in r(\varkappa Q^+ + k)$, nous avons

$$x + jr\varkappa e_1 \in r(Q+k) \setminus \bigcup_{k'\in A_N} r(2\varkappa Q + k')\,, \quad \forall j = 1, \dots, l\,.$$

Alors (3.12), (3.13) et (3.14) nous donnent

$$\left|\Delta^\ell_{r\varkappa e_1}(f\circ g)(x)\right| = |f(b') - f(b)|\,.$$

Par la proposition 2.7, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &\geq (r\varkappa)^{-s}\left(\sum_{k\in A_N}\int_{r(\varkappa Q^+ + k)}\left|\Delta^\ell_{r\varkappa e_1}(f\circ g)(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\\ &= |f(b') - f(b)|(2N+1)^{n/p}(r\varkappa)^{-s}|r\varkappa Q^+|^{1/p}\,.\end{aligned}$$

L'encadrement (3.10) implique

$$|f(b') - f(b)| \le c_1 M r^{s-n/p} N^{-n/p} \le c_2 M \delta^{-1} |b' - b|\,,$$

qui signifie que f est globalement Lipschitzienne. $\square$

3.4. **Preuves des théorèmes 3.3 et 3.5**

Preuve du théorème 3.3. Supposons que T_f envoie l'espace $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors par le lemme 3.9, $S_{f_{a'}}$ envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, et d'après le lemme 3.10 la fonction $x_j \mapsto f_{a'}(x_j)$ est affine pour tout $1 \le j \le m$ et $a' \in \mathbb{R}^{m-1}$, donc

$$f_{a'}(x_j) = c_0 + c_1 x_j, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m\},$$

où c_0, c_1 dépendent des autres variables. Donc on obtient

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} c_\alpha x^\alpha,$$

et on veut montrer que les seuls c_α qui sont non nuls sont ceux pour lesquels $\alpha_j = 0$ sauf pour une valeur de j. Puisque par hypothèse T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $L_p(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \le p < \infty$, on a $c_0 = 0$. Maintenant supposons qu'il existe deux indices $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ $(j \neq k)$ tels que $c_\alpha \neq 0$ pour un α tel que $\alpha_j = \alpha_k = 1$. En permutant les cordonnées, on peut faire en sorte que $j = 1$ et $k = 2$, donc on obtient

$$\begin{gathered} c_\alpha^{-1} f(x_1, \ldots, x_m) = x_1 x_2 u(x_3, \ldots, x_m) + x_1 v(x_3, \ldots, x_m) + \\ x_2 w(x_3, \ldots, x_m) + z(x_3, \ldots, x_m) \end{gathered}$$

où u, v, w et z sont des polynômes sur $\mathbb{R}^{m-2}$ tels que $u \neq 0$ et $z(0) = 0$. On choisit $(a_3, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m-2}$ tel que $u(a_3, \ldots, a_m) \neq 0$.

On considère une fonction $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à support compact, telle que

$$\theta \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \theta^2 \notin B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n),$$

(voir : fin de l'étape 1 du lemme 3.10 pour la construction de θ). On considère aussi $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\psi(x) = 1$ sur *supp* θ, on définit alors $g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ par

$$g(x) = (\theta(x), \theta(x), a_3 \psi(x), \ldots, a_m \psi(x)).$$

Alors

$$\begin{gathered} c_\alpha^{-1} (f \circ g)(x) = \theta^2(x) u(a_3, \ldots, a_m) + \theta(x) v(a_3, \ldots, a_m) + \\ \theta(x) w(a_3, \ldots, a_m) + z(a_3 \psi(x), \ldots, a_m \psi(x)). \end{gathered}$$

Finalement, on obtient

$$\theta^2(x) = \frac{1}{c_\alpha u(a_3,\dots,a_m)}(f\circ g)(x) + b\theta(x) + \psi_1(x),$$

où $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $b\in\mathbb{R}$, ce qui entraîne $\theta^2 \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$; d'où une contradiction. □

Preuve du théorème 3.5. Par définition on a

$$f\in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{loc} \Longleftrightarrow uf \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\,, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Soit v une fonction non nulle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-m})$ et à support dans une boule $\mathbb{B}_{n-m}$. Supposons que le support de u est inclus dans la boule $\mathbb{B}_m$. Choisissons $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ de façon que $g(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_m)$ pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{B}_m\times\mathbb{B}_{n-m}$. Nous obtenons

$$fu\otimes v = (f\circ g)(u\otimes v).$$

On a par hypothèse $f\circ g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Comme $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module, on a $fu\otimes v\in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Par la proposition 2.6, on conclut que $fu\in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$. □

4. Régularité du calcul symbolique

4.1. Calcul symbolique borné

Si E et F sont deux espaces métriques, une application $T : E\to F$ est dite *bornée* si, pour toute partie bornée B de E, $T(B)$ est borné dans F.

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$; on dit que E est un $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$-module si tout élément de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ opère sur E par la multiplication usuelle entre les fonctions scalaires et les fonctions vectorielles.

Il est bien connu que pour $s>0$ les espaces $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ sont des $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$-modules (voir par exemple [9, 4.6.4]).

Proposition 4.1. *Soit $s>0$. Pour toute f appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ et s'annulant en 0, l'opérateur T_f est borné sur $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.*

Démonstration. La démonstration résulte de [9, 5.3.4]. En effet il est possible de remplacer $C^\infty(\mathbb{R})$ par $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, dans [4, prop. 1] à condition toutefois remplacer la formule de Taylor pour les fonctions scalaires par la formule de Taylor pour les fonctions vectorielles dans [9, lem. 1, p. 317] ou voir [9, th. 2, p. 368]. □

Soit $\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, pour lesquelles T_f est une application bornée de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $f(0)=0$.

L'espace $\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$ sera abrégé en Φ si le contexte est clair.

Pour tout $r\in\mathbb{N}$, on notera $W^r(\Phi)$ l'espace des fonctions $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ telles que $\partial^\alpha f\in\Phi$ pour tout $|\alpha|\le r$.

Proposition 4.2. *Soit $s>0$. Alors l'espace $\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$ est un espace de Fréchet pour les semi-normes*

$$\nu_r(f):=\sup\{\|f\circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\ :\ \|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\le r\}\qquad\forall r\in]0,+\infty[\,.$$

Démonstration. Soit $(f_k)_{k\ge1}$ une suite de Cauchy dans Φ. Par le théorème 3.1, on a le plongement

$$\Phi\hookrightarrow W^1_\infty(\mathbb{R}^m)_{loc},\tag{4.1}$$

qui signifie que $(f_k)_{k\ge1}$ admet une limite f dans $W^1_\infty(\mathbb{R}^m)_{loc}$, ce qui entraîne que la suite $(f_k)_{k\ge1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$. Supposons maintenant que $g\in\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, alors la suite $(f_k\circ g)_{k\ge1}$ converge vers $f\circ g$ dans $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, en outre

$$\sup_{k\ge0}\|f_k\circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\le\sup_{k\ge0}\nu_{\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}}(f_k)<+\infty\,.$$

Par la propositionriété de Fatou de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (voir [4, cor. 1]), on obtient $f\circ g\in\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et le fait que l'opérateur T_f est borné. En appliquant de nouveau la propriété de Fatou, on conclut que

$$\lim_{k\to\infty}\nu_r(f_k-f)=0\qquad\forall r>0\,.$$

□

4.2. Une condition suffisante pour que T_f soit localement lipschitzienne

Si f de classe $C^1(\mathbb{R}^m)$, nous notons $T_{\nabla f}$ l'opérateur de composition défini par $T_{\nabla f}(g)=(\partial_1 f\circ g,\dots,\partial_m f\circ g)$.

Théorème 4.3. *Soit $s>0$. Si $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ est une fonction continue appartenant à $W^1(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)))$, alors l'application $T_f:\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\to\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.*

Démonstration. Soient g, h deux fonctions dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. D'après (4.1), f est de classe C^1. Grâce la formule de Taylor avec reste intégral, il vient alors

$$(f \circ (g+h) - f \circ g)(x) = \int_0^1 (\nabla f \circ (g+th))(x).h(x)\, dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n \,. \tag{4.2}$$

Maintenant nous considérons $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)+E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)} = 1$ (voir [4, prop. 6]). Alors le théorème de Fubini nous donne

$$\langle f \circ (g+h) - f \circ g, u\rangle = \int_0^1 \langle (\nabla f \circ (g+th)).h, u\rangle \, dt \,.$$

Puisque $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach, on a

$$\|\nabla f \circ (g+th).h\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|\nabla f \circ (g+th)\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \|h\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}.$$

Par hypothèse sur f, il vient

$$\|f \circ (g+h) - f \circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|h\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \sup_{j=1,\ldots,m} \nu_{\|g\|+\|h\|}(\partial_j f) \ , \tag{4.3}$$

qui signifie que T_f est lipschitzienne sur toute boule de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. □

Il est raisonnable de conjecturer que T_f n'est jamais uniformément continu sur $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tout entier m, sauf si f est affine. En voici la preuve dans le cas $s > 1/p$.

Théorème 4.4. *Soient $s > 1/p$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour toute boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$, l'application*

$$T_f : \Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m), \| - \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\Big) \to B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{loc}$$

est uniformément continue. Alors f est une fonction affine.

Démonstration. Fixons j et $a' := (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$, et définissons la fonction

$$f_{a'}(x) := f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_m), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Considérons l'opérateur linéaire

$$\Psi : \Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}), \| - \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\Big) \to \Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m), \| - \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\Big) \,,$$

défini par

$$\Psi(u)(x) = (a_1\varphi(\frac{x}{2}), \ldots, a_{j-1}\varphi(\frac{x}{2}), u(x), a_{j+1}\varphi(\frac{x}{2}), \ldots, a_m\varphi(\frac{x}{2})).$$

Par définition de φ, on a $\varphi(\frac{x}{2}) = 1$ si $\varphi(x) \neq 0$. Il vient donc

$$\varphi(f_{a'} \circ u) = \varphi(f \circ \Psi(u)) \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{B}).$$

De l'hypothèse sur T_f, on déduit immédiatement que $T_{f_{a'}}$ est uniformément continue de $\Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}), \| - \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\Big)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{loc}$, ce qui donne que $f_{a'}$ est une fonction affine (voir [4, th. 6]). On obtient

$$f_{a'}(x_j) = c_0 + c_1 x_j, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m\},$$

où c_0, c_1 dépendent des autres variables. Il vient alors

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} c_\alpha x^\alpha.$$

Maintenant supposons qu'il existe $\alpha \in \{0,1\}^n$ tel que $c = c_\alpha > 0$ et tel que $\alpha_j = \alpha_k = 1$ pour deux indices $j \neq k$. Nous définissons la fonction

$$g_{a,b}(x) = (0, \ldots, 0, (ax_j + b)\varphi(x), 0, \ldots, 0, (ax_k + b)\varphi(x), 0, \ldots, 0),$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ $(j \neq k)$. Par hypothèse sur T_f, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|S_f(g_{a,b}) - S_f(g_{a,0})\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \quad \forall b \in [-\eta, \eta], \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Posons $\psi(x) = (x_j + x_k)\varphi^3(x)$, on obtient

$$|a| \leq \frac{1 + 2\eta\|\varphi^2\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} + \eta^2\|\varphi^3\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\eta\|\psi\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}}, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

ce qui est absurde. □

4.3. Une condition nécessaire pour que T_f soit localement lipschitzienne

Théorème 4.5. *Soient $s > 0$, m, n des entiers tels que $1 \leq m \leq n$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour toute boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et tout compact K de $\Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m), \| - \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\Big)$, l'application $T_f : K \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est lipschitzienne. Alors f appartient à $E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$.*

Démonstration. Nous divisons notre preuve en deux étapes.

Étape 1. Supposons le support de f inclus dans la boule $\mathbb{B}_m(a,1)$. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tel que $u(x) = 1$ sur $\mathbb{B}_m(a,2)$ et $u(x) = 0$ hors de $\mathbb{B}_m(a,3)$. On obtient

$$(\tau_t f - f)u = \tau_t f - f \qquad \forall t \in \mathbb{B}_m(0,1)\,. \tag{4.4}$$

Soit v une fonction non nulle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-m})$ et à support dans une boule $\mathbb{B}_{n-m}$. Choisissons $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ de façon que $g(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_m)$ pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{B}_m(a,4) \times \mathbb{B}_{n-m}$. Nous obtenons

$$(\tau_t f - f) \otimes v = (f \circ \tau_{(t,0)} g - f \circ g)\,(u \otimes v) \qquad \forall t \in \mathbb{B}_m(0,1)\,. \tag{4.5}$$

Par l'hypothèse sur f, T_f lipschitzienne sur l'ensemble

$$\{\tau_{(t,0)} g \,:\, t \in \mathbb{B}_m(0,1)\}\,.$$

Par les propositions 14 et 6 de [4], il vient alors $\|\tau_{(t,0)} g - g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = O(|t|)$ quand $|t| \to 0$. La proposition 2.6 et l'égalité (4.5) donnent aussitôt

$$\|\tau_t f - f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} = O(|t|) \qquad |t| \to 0\,.$$

Puisque $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ est le dual d'un E.B.D (voir [4, prop. 5]), la proposition 14 de [4] donne $\partial_j f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ pour tout $j = 1,\ldots,m$. En tenant compte de $s > 0$, il vient $\partial_j f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ pour tout $j = 1,\ldots,m$. Puisque la fonction f est à support compact, nous obtenons $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$. Par une propriété standard des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel, on a

$$E^r_{p,q}(\mathbb{R}^m) = \{v \in L_p(\mathbb{R}^m) \,:\, \nabla v \in E^{r-1}_{p,q}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)\},$$

pour tout $r > 0$. Donc $f \in E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$.

Étape 2. On va vérifier que $uf \in E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Par la proposition 4.1 et le théorème 4.3, nous voyons que

$$T_{u-u(0)-\nabla u(0).id_{\mathbb{R}^m}} = T_{u-u(0)} - T_{\nabla u(0).id_{\mathbb{R}^m}}\,,$$

est lipschitzienne sur tout borné de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Puisqu'il en est de même pour $T_{\nabla u(0).id_{\mathbb{R}^m}}$, $T_{u-u(0)}$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Il vient alors

$$T_{(u-u(0))f}(g) = T_{u-u(0)}(g)\,T_f(g) \qquad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\,, \tag{4.6}$$

Par l'hypothèse sur T_f, $T_{(u-u(0))f}$ est lipschitzienne sur tout compact de

$$\Big(\mathcal{D}(\mathbb{B},\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\Big)\,,$$

pour toute boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Puisque $T_{uf} = u(0)T_f + T_{(u-u(0))f}$, il en est de même pour T_{uf} et grâce à l'*étape 1*, on conclut que $uf \in E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$. $\square$

4.4. Une condition suffisante pour que T_f soit régulier

Soit $r \in \mathbb{N}$. Par la proposition 4.1, toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $\partial^\alpha f(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \le r$, appartient à $W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$.

Théorème 4.6. *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $s > 0$. Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue appartenant à*

$$cl_{W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)))}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))),$$

alors l'application $T_f : \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^r.

Démonstration. Considérons l'opérateur linéaire continu

$$\begin{array}{cccc} M: & \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \\ & u & \mapsto & \{v \mapsto u.v\} \end{array}.$$

Fixons $g \in \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et supposons que h appartient à $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, avec $\|h\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \le 1$.

Étape 1. Continuité de T_f : le cas $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap \Phi$. On a

$$T_f = T_{f - \nabla f(0).\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} + \nabla f(0).\mathrm{id}_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\,.$$

Par la proposition 4.1, il vient $f - \nabla f(0).\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \in W^1(\Phi)$. On voit aisément que T_f continue grâce au théorème 4.3 appliqué à $f - \nabla f(0).\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$.

Étape 2. Continuité de T_f : le cas général. Si $f \in cl_{W^r(\Phi)}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^r(\Phi))$, et $\varepsilon > 0$, alors il existe $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap \Phi$ tel que

$$\nu_{1+\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}}(f - f_1) \le \varepsilon\,.$$

Il vient

$$\|f \circ (g + h) - f \circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le 2\varepsilon + \|f_1 \circ (g + h) - f_1 \circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

et suivant l'*étape 1* appliquée à f_1, on a alors la continuité de l'opérateur T_f.

Étape 3 : Nous allons montrer par récurrence sur r que T_f est de classe C^r si $f \in cl_{W^r(\Phi)}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^r(\Phi))$. Le cas $r = 0$ est déjà prouvé par l'*étape 2*. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour r et prouvons-la pour $r+1$. On suppose que f appartient à $cl_{W^{r+1}(\Phi)}(C^\infty(\mathbb{R}^m)\cap W^{r+1}(\Phi))$. Puisque f est de classe $C^{r+1}(\mathbb{R}^m)$, on a

$$\langle f\circ(g+h) - f\circ g - (\nabla f\circ g).h, u\rangle =$$
$$\int_0^1 \langle (\nabla f\circ(g+th) - \nabla f\circ g)\,.h, u\rangle\, dt \qquad \forall u\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{4.7}$$

Par l'*étape 2*, on obtient que $T_{\nabla f}$ est continue sur $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans lui même. En raisonnant comme à la fin de la preuve du théorème 4.3, on déduit de la formule (4.4) la différentiabilité de T_f, et l'égalité

$$dT_f = M\circ T_{\nabla f}.$$

Puisque

$$\partial_j f\in cl_{W^r(\Phi_s)}(C^\infty(\mathbb{R}^m)\cap W^r(\Phi)),$$

pour tout $j=1,\dots,m$, l'hypothèse de récurrence montre que $T_{\nabla f}$ est de classe C^r. On conclut que dT_f est de classe C^r, de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m),\,\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, et donc que T_f est de classe C^{r+1}. □

4.5. **Une condition nécessaire pour que T_f soit régulier**

On notera $\overset{\circ}{E}{}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Si $1\le p,q<\infty$, on a

$$\overset{\circ}{E}{}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\,, \tag{4.8}$$

(voir par exemple [10, 2.3.3]).

Proposition 4.7. *Soit $s>0$. On suppose que $q\in[1,\infty[$. Alors*

(i) $\mathrm{cl}_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\left(C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right) = E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $\mathrm{cl}_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{loc}}(C^\infty(\mathbb{R}^n)) = E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{loc}$.

Démonstration. Voir par exemple [4, prop. 7]. □

On dit que T_f a la propriété $(\mathcal{P}_r)$ si T_f est de classe C^r de

$$\left(\mathcal{D}(\mathbb{B},\mathbb{R}^m), \|-\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\right)$$

dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, pour toute boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.8. *Soient $s > 0$, $r \in \mathbb{N}$, m, n des entiers tels que $1 \leq m \leq n$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'application $T_f : \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^r. Alors f appartient à $(\overset{\circ}{E}{}^{s+r}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$.*

Lemme 4.9. *Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que T_f a la propriété $(\mathcal{P}_1)$, alors f est continûment différentiable et*

$$dT_f(g).h = (\nabla f \circ g).h \qquad \forall g, h \in \mathcal{D}(\mathbb{B}(0,R), \mathbb{R}^m)\,,\ \forall R > 0\,. \tag{4.9}$$

Preuve du lemme 4.9. Par la propriété $(\mathcal{P}_1)$, nous avons

$$dT_f(g).h = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ (g + th) - f \circ g}{t} \tag{4.10}$$

dans $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors par la continuité de f, on en déduit que $dT_f(g).h$ est continue, et que

$$(dT_f(g).h)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(g(x) + th(x)) - f(g(x))}{t}.$$

En choisissant $g(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ et $h(x) = e_j$, $j = 1, \dots, m$, sur $\mathbb{B}(0, R/2)$, nous obtenons l'existence et la continuité de ∇f sur $\mathbb{B}(0, R/2)$, donc sur tout $\mathbb{R}^m$. En reprenant des fonctions g, h arbitraires, on conclut que l'identité (4.10) implique l'égalité (4.9). □

Lemme 4.10. *Une distribution $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ appartient à $(\overset{\circ}{E}{}^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$ si et seulement si*

(i) $f \in (\overset{\circ}{E}{}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$,

(ii) $\nabla f \in (\overset{\circ}{E}{}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))_{loc}$.

Preuve du lemme 4.10. On a

$$(\overset{\circ}{E}{}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc} = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) : \lim_{x \to 0} \tau_x f = f \text{ dans } E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc} \right\}. \tag{4.11}$$

(voir [4, prop. 12]). Par la propriété

$$E^{s+r}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = W^r(E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \quad \forall r \in \mathbb{N}, \tag{4.12}$$

nous avons $E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc} = W^1(E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc})$ (voir [4, prop. 13]) en tout qu'espace de Fréchet. Alors f appartient à $(\overset{\circ}{E}{}^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$ si et seulement si $\lim_{x \to 0} \tau_x f = f$ dans $E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$, autrement dit : si et seulement si

$$\lim_{x \to 0} \tau_x f = f \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \nabla(\tau_x f) = \nabla f$$

dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$ et $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_{loc}$ respectivement. Puisque $\nabla(\tau_x f) = \tau_x(\nabla f)$, l'égalité (4.12) permet de finir la preuve du lemme. □

Preuve du théorème 4.8. Nous allons raisonner par récurrence sur r.

Étape 1. Supposons que T_f a la propriété $(\mathcal{P}_0)$.

Étape 1.1. Si le support de f est compact, alors l'égalité (4.5) conduit à

$$\lim_{t\to 0} \|\tau_t f - f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} = 0\,. \tag{4.13}$$

Par (4.13), la compacité du support de f, il vient alors $f \in \overset{\circ}{E}{}^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ (voir [4, prop. 11]).

Étape 1.2. Si le support de f n'est pas compact, nous raisonnons comme dans la preuve du théorème 4.5. D'après la proposition 4.1 et le théorème 4.6, nous savons que $T_{u-u(0)}$ est continu de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Par l'égalité (4.6), et par la continuité du produit dans l'algèbre $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $T_{(u-u(0))f}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P}_0)$. Puisque $T_{uf} = T_{(u-u(0))f} + u(0)T_f$, il en est de même pour T_{uf}. Par l'*étape 1.1.* On conclut que $uf \in \overset{\circ}{E}{}^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$.

Étape 2. Supposons que T_f a la propriété $(\mathcal{P}_{r+1})$. Fixons une boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et $j = 1, \ldots, m$. On considère une fonction $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que $h(x) = e_j$ pour tout $x \in \mathbb{B}$. En appliquant le lemme 4.9 à une boule incluant $\mathbb{B}$ et le support de h, on obtient

$$T_{\partial_j f - \partial_j f(0)}(g) = dT_f(g).h - \partial_j f(0) \qquad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m)\,.$$

Par hypothèse sur f, l'opérateur $g \mapsto dT_f(g).h$ vérifie la propriété $(\mathcal{P}_r)$, ce qui donne $\partial_j f - \partial_j f(0) \in \big(\overset{\circ}{E}{}^{s+r}_{p,q}(\mathbb{R}^m)\big)_{loc}$. Par le lemme 4.10, on conclut que $f \in \big(\overset{\circ}{E}{}^{s+r+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)\big)_{loc}$. □

5. Remarques et problèmes ouverts

Pour $s > 1$, on a mis en évidence des conditions nécessaires qui ne sont généralement pas suffisantes. C'est évidemment le cas de la condition de Lipschitz et, même en lui adjoignant l'appartenance locale à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$, on n'obtient pas pour autant une condition suffisante (c'est notamment le cas pour $1 \leq s \leq 1 + (1/p)$ — voir [4, rem. 5]). Il se pose donc la question suivante : si $s > 1$, comment caractériser les fonctions f qui opèrent sur $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$?

Au vu des résultats obtenus pour $m = n = 1$ et pour une large classe de paramètres s, p, q, par Bourdaud, Moussai, Sickel (voir [5]), il est raisonnable de formuler la conjecture suivante :

Conjecture Soient $s > 1 + (1/p)$, $m \leq n$. Une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ opère de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si elle satisfait les trois conditions suivantes :
- $f(0) = 0$;
- f est localement lipschitzienne ;
- f appartient localement à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$.

Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathcal{I}_{m,n,E}$ l'ensemble des triplets (s, p, q) pour lesquels la conjecture est valide. Si $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{m,n,E}$ et $s > \max(m/p, 1 + (1/p))$, on peut montrer, exactement comme le font Bourdaud et Lanza [4], que les théorèmes 4.6 et 4.8 débouchent sur une caractérisation des opérateurs de superposition de classe C^r. Le seul problème c'est qu'on ignore si $\mathcal{I}_{m,n,E}$ est non vide pour $m > 1$.

Pour $m > n$, la caractérisation du calcul symbolique est largement ouverte, car on ne connait pas encore les énoncés qui devraient remplacer les théorèmes 3.5, 4.5 et 4.8.

Références

[1] G. Bourdaud – « Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers », Thèse, Université Paris-Sud, Orsay, 1983.

[2] G. Bourdaud – « La trivialité du calcul fonctionnel dans l'espace $H^{3/2}(\mathbf{R}^4)$ », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **314** (1992), no. 3, p. 187–190.

[3] ———, « Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **10** (1993), no. 4, p. 413–422.

[4] G. Bourdaud et M. Lanza de Cristoforis – « Regularity of the symbolic calculus in Besov algebras », *Studia Math.* **184** (2008), no. 3, p. 271–298.

[5] G. Bourdaud, M. Moussai et W. Sickel – « An optimal symbolic calculus on Besov algebras », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **23** (2006), no. 6, p. 949–956.

[6] M. Frazier et B. Jawerth – « Decomposition of Besov spaces », *Indiana Univ. Math. J.* **34** (1985), no. 4, p. 777–799.

[7] ———, « A discrete transform and decompositions of distribution spaces », *J. Funct. Anal.* **93** (1990), no. 1, p. 34–170.

[8] J. Peetre – *New thoughts on Besov spaces*, Mathematics Department, Duke University, Durham, N.C., 1976, Duke University Mathematics Series, No. 1.

[9] T. Runst et W. Sickel – *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 3, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.

[10] H. Triebel – *Theory of function spaces*, Monographs in Mathematics, vol. 78, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[11] ———, *Theory of function spaces. II*, Monographs in Mathematics, vol. 84, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

Salah Eddine Allaoui
Département de Mathématique
et Informatique
Université de Laghouat
Laghouat 00003
Algérie
shallaoui@yahoo.fr