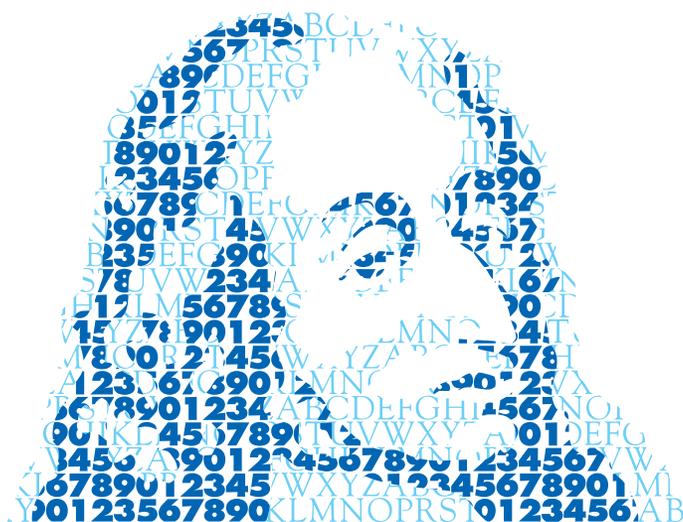


# ANNALES MATHÉMATIQUES



## BLAISE PASCAL

MY DRISS AOURAGH ET NAJI YEBARI

**Stabilisation exponentielle d'une équation des poutres  
d'Euler-Bernoulli à coefficients variables**

Volume 16, n° 2 (2009), p. 483-510.

[http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP\\_2009\\_\\_16\\_2\\_483\\_0](http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2009__16_2_483_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2009, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques  
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS  
Clermont-Ferrand — France*

**cedram**

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# Stabilisation exponentielle d'une équation des poutres d'Euler-Bernoulli à coefficients variables

MY DRISS AOURAGH  
NAJI YEBARI

## Résumé

Dans ce travail, nous étudions la propriété de base de Riesz et la stabilisation exponentielle pour une équation des poutres d'Euler-Bernoulli à coefficients variables sous un contrôle frontière linéaire dépendant de la position (resp. l'angle de rotation), de la vitesse et de la vitesse de rotation dans le contrôle force (resp. moment). Nous montrons qu'il existe une suite de fonctions propres généralisées qui forme une base de Riesz de l'espace d'énergie considéré, et qu'il y a stabilité exponentielle sous certaines conditions portant sur les coefficients de feedback assurant la dissipation. Des résultats numériques sont aussi présentés. Ce papier est la version non uniforme de l'article [13].

## 1. Introduction

Nous considérons une poutre d'Euler-Bernoulli à coefficients variables, la poutre est encastree à une extrémité et contrôlée à l'autre extrémité en force et moment par une combinaison linéaire de la vitesse, de la vitesse de rotation et le terme de position (resp. l'angle de rotation) dans le contrôle force (resp. moment). La longueur de la poutre est supposée égale à l'unité, la masse linéique  $\rho(\cdot)$  et la rigidité de flexion  $EI(\cdot)$  de la poutre sont supposées des fonctions régulières. Soit  $y(x, t)$  la déviation transversale au

---

*Mots-clés* : Equation d'Euler-Bernoulli, Coefficients variables, Comportements asymptotiques, Base de Riesz, Stabilité.

*Classification math.* : 74B05, 74K10, 93D15, 35B33, 93D15.

point  $x$  et au temps  $t$ , nous obtenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(x)y_{tt}(x, t) + (EI(x)y_{xx}(x, t))_{xx} = 0 & 0 < x < 1, t > 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0 & t > 0, \\ -EI(1)y_{xx}(1, t) = L_0(t) & t > 0, \\ (EI(\cdot)y_{xx})_x(1, t) = L_1(t) & t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), y_t(x, 0) = y_1(x) & 0 < x < 1, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_0(t) = (2\mu_{11}y_t + \mu_{12}y_{xt} + \alpha y_x)(1, t) & t > 0, \\ L_1(t) = (\mu_{21}y_t + 2\mu_{22}y_{xt} + \beta y)(1, t) & t > 0, \end{array} \right.$$

où  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\mu_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  sont des constantes positives telles que

$$\mu_{12} > 0 \text{ et } \mu_{12}\mu_{21} \geq (\mu_{11} + \mu_{22})^2. \quad (1.2)$$

Le cas uniforme du système (1.1), avec la condition  $\mu_{12}\mu_{21} > (\mu_{11} + \mu_{22})^2$  et  $\alpha = \beta = 0$ , est appelé deuxième problème de Rideau [11] selon P. Grabowski [3], est étudié par N. Yebari *et al.* [13], où il est démontré que le problème est bien posé au sens des semi-groupes de contraction et uniformément stable, puis ils ont établi que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale de l'opérateur associé au système, en appliquant la théorie de A. Shkalikov [12]. Le système (1.1) dans le cas où on a juste un contrôle force avec une vitesse ( $\alpha = \beta = \mu_{ij} = 0$  sauf pour  $\mu_{21} > 0$ ) est étudié par Bao-Zhu Guo [4], où il est démontré qu'une suite de fonctions propres généralisées associée à l'opérateur du système forme une base de Riesz pour l'espace d'énergie considéré, puis le taux optimal de décroissance de l'énergie ainsi que la stabilité exponentielle s'en déduisent.

Dans ce travail, nous considérons le système (1.1), avec le même contrôle frontière que le système hybride étudié par B. Rao [9] dans le cas (1.2), et nous obtenons des résultats analogues à ceux obtenus par Bao-Zhu Guo [4], mais moyennant beaucoup des difficultés d'ordre technique supplémentaires qui s'ajoutent dans notre cas qui sont liées d'une part au choix du même contrôle frontière que le système hybride étudié par B. Rao [9] chose qui a été suggérée par le referee dans le cas uniforme N. Yebari *et al.* [13], de plus le cas limite de la condition de dissipation qui nécessite un traitement particulier et d'autre part, l'introduction d'une condition de coercivité sur les coefficients  $EI(\cdot)$  et  $EI'$  qui est satisfaite pour le cas uniforme et qui n'apparaît pas dans le cas étudié par Bao-Zhu Guo [4].

Le plan de ce travail est le suivant. Dans la section 2, nous justifions l'existence, la compacité de l'opérateur associé à notre système noté  $\mathbb{A}$  et nous donnons le comportement asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres de cet opérateur. La troisième section est consacrée au résultat principal de cette étude à savoir l'existence d'une suite de fonctions propres généralisées associée à l'opérateur  $\mathbb{A}$  qui forme une base de Riesz pour l'espace d'énergie considéré, puis le taux optimal de décroissance de l'énergie ainsi que la stabilité exponentielle s'en déduisent. La section 4 est consacrée à la simulation numérique du spectre de l'opérateur  $\mathbb{A}$ , autrement dit, on étudiera l'influence des paramètres  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\mu_{ij} \geq 0$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  sur la vitesse de convergence de l'énergie associée au système (1.1).

## 2. Hautes fréquences

Soit  $y$  une solution régulière du système (1.1). On introduit son énergie associée  $E(t)$  comme suit

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 [\rho(x)y_t^2(x, t) + EI(x)y_{xx}^2(x, t)] dx + \alpha y_x^2(1, t) + \beta y^2(1, t) \right). \quad (2.1)$$

Un calcul formel montre que

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2(\mu_{11} + \mu_{22})y_t(1, t)y_{xt}(1, t) - \mu_{12}y_{xt}^2(1, t) - \mu_{21}y_t^2(1, t), \quad (2.2)$$

L'hypothèse (1.2) implique que l'énergie  $E(t)$  est décroissante et définit une fonction de Lyapunov. Dans toute la suite de ce travail, nous supposons que

$$(EI(\cdot), \rho(\cdot)) \in [C^4(0, 1)]^2 \text{ et } EI(\cdot) > 0, \rho(\cdot) > 0 \text{ dans } [0, 1]. \quad (2.3)$$

Alors on peut poser

$$\eta(s) = (\rho(s)/EI(s))^{1/4}, p = \int_0^1 \eta(s)ds, \quad (2.4)$$

Soit

$$\mathbb{V} = \{f \in H^2(0, 1); f(0) = f'(0) = 0\}$$

et soit l'espace de Hilbert  $\mathbb{H} = \mathbb{V} \times L^2(0, 1)$  muni du produit scalaire suivant : Pour tout  $(F = (f_1, g_1), G = (f_2, g_2)) \in \mathbb{H}^2$

$$(F, G)_{\mathbb{H}} = \int_0^1 (\rho g_1 \bar{g}_2 + EI f_1'' \bar{f}_2'')(x) dx + (\alpha f_1' \bar{f}_2' + \beta f_1 \bar{f}_2)(1). \quad (2.5)$$

Posons  $\mathbb{X} = (\mathbb{V} \cap H^4(0, 1)) \times \mathbb{V}$  et considérons l'opérateur linéaire  $\mathbb{A}$  défini par

$$D(\mathbb{A}) = \left\{ (f, g) \in \mathbb{X} \mid \begin{array}{l} -EI(1)f''(1) = 2\mu_{11}g(1) + \mu_{12}g'(1) + \alpha f'(1), \\ (EI(\cdot)f''(\cdot))'(1) = \mu_{21}g(1) + 2\mu_{22}g'(1) + \beta f(1) \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

$$\mathbb{A}(f, g) = (g(\cdot), -(1/\rho(\cdot))(EI(\cdot)f''(\cdot))'') \quad \text{pour tout } (f, g) \in D(\mathbb{A}), \quad (2.7)$$

avec la donnée initiale  $Y_0 = (y_0, y_1)$ . Le problème (1.1) contrôlé en boucle fermé à l'une de ses extrémités peut être formulé d'une façon équivalente sous forme d'un problème d'évolution sur  $\mathbb{H}$  :

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mathbb{A}Y(t), \quad Y(0) = Y_0, \quad (2.8)$$

où  $Y(t) = (y(\cdot, t), y_t(\cdot, t))$ . Nous sommes intéressé par la propriété de base de Riesz du problème (2.8), c'est à dire nous voulons savoir comment un système des vecteurs propres généralisés associé à l'opérateur  $\mathbb{A}$  forme une base inconditionnelle de  $\mathbb{H}$ . Pour ce faire, nous avons besoin dans ce qui suit de quelques propriétés spectrales de l'opérateur  $\mathbb{A}$ .

**Proposition 2.1.** *L'opérateur  $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$  est défini par (2.6) et (2.7). Alors :*

- i)  $\mathbb{A}^{-1}$  existe et est compact dans  $\mathbb{H}$ . Donc  $\sigma(\mathbb{A})$ , le spectre de  $\mathbb{A}$ , est formé seulement des valeurs propres isolées, qui sont distribuées dans le plan complexe en paires conjuguées.
- ii) La fonction propre correspondante à  $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$  est de la forme  $(\lambda^{-1}\Phi, \Phi)$  où  $\Phi \neq 0$  vérifie

$$\begin{cases} \lambda^2 \rho(x)\Phi(x) + (EI(x)\Phi''(x))'' = 0, 0 < x < 1, \\ \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \\ -EI(1)\Phi''(1) = 2\lambda\mu_{11}\Phi(1) + (\lambda\mu_{12} + \alpha)\Phi'(1), \\ (EI(\cdot)\Phi''(\cdot))'(1) = (\lambda\mu_{21} + \beta)\Phi(1) + 2\lambda\mu_{22}\Phi'(1). \end{cases} \quad (2.9)$$

iii) Les valeurs propres  $(\lambda_n, \bar{\lambda}_n)$  de  $\mathbb{A}$  ont les propriétés asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \tau_n^2/p^2, \\ \tau_n &= (1/\sqrt{2})(n - \frac{1}{4})\pi(i + 1) + O(n^{-1}) \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \end{aligned} \tag{2.10}$$

où  $n$  est un entier naturel assez grand et  $\bar{\lambda}_n$  est le complexe conjugué de  $\lambda_n$ . De plus,  $\lambda_n$  est géométriquement simple lorsque  $n$  est assez grand.

iv) Il existe une solution  $\Phi_n$  de (2.9) correspondante à  $\lambda_n$  ayant le développement asymptotique suivant

$$e^{\frac{1}{4} \int_0^z a(s) ds} \Phi_n(x) = -2(1 + i) \{ (\sin(n - \frac{1}{4})\pi z - \cos(n - \frac{1}{4})\pi z + e^{-(n-\frac{1}{4})\pi z} \} + O(n^{-1}), \tag{2.11}$$

$$\lambda_n^{-1} \Phi_n''(x) = 2\Lambda(x)(i - 1) \{ \cos(n - \frac{1}{4})\pi z - \sin(n - \frac{1}{4})\pi z + e^{-(n-\frac{1}{4})\pi z} \} + O(n^{-1}), \tag{2.12}$$

où  $\Lambda(x)$ ,  $z = z(x)$  et  $a(z)$  sont définis par

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= e^{-\frac{1}{4} \int_0^z a(s) ds} \eta^2(x), \quad z(x) = \frac{1}{p} \int_0^x \eta(s) ds, \\ a(z) &= 2p(\eta^{-2}(3\eta' + \eta EI'/EI))(x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

*Démonstration.*

i) Compte tenu de (2.6) et (2.7), nous avons  $\mathbb{A}^{-1}(f, g) = (\Phi, \Psi)$ , pour tout  $(f, g) \in \mathbb{H}$ , donc

$$\Psi(x) = f(x), \quad -(1/\rho(x))(EI(x)\Phi''(x))'' = g(x), \quad 0 < x < 1.$$

Si nous posons

$$\delta = (-2\mu_{11}f - \mu_{12}f')(1),$$

$$\sigma = (\mu_{21}f + 2\mu_{22}f')(1),$$

$$G(x) = \int_0^x (EI(r))^{-1} \int_r^1 \int_t^1 (\rho g)(s) ds dt dr,$$

$$I_{ij}(x) = \int_0^x (1 - r)^j (x - r)^{i-1} (EI(r))^{-1} dr, \quad (i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\},$$

$$a = 1 + \alpha I_{10}(1), \quad b = (\delta I_{10} - \sigma I_{11} - G)(1),$$

$$\xi = 1 + \beta a^{-1} (I_{21}(1) + \alpha [I_{10}I_{21} - I_{11}^2](1)) > 0,$$

alors un calcul simple montre que

$$\Phi'(1) = ba^{-1} - \beta a^{-1} I_{11}(1)\Phi(1),$$

$$\Phi(1) = \xi^{-1}((\delta - \alpha ba^{-1})I_{11}(1) - \sigma I_{21}(1) - \int_0^1 G(x) dx),$$

$$\Phi(x) = (\delta - \alpha\Phi'(1))I_{20}(x) - (\sigma + \beta\Phi(1))I_{21}(x) - \int_0^x G(s) ds,$$

donc  $\mathbb{A}^{-1}$  existe et nous avons

$$\|\mathbb{A}^{-1}(f, g)\|_{H^4(0,1) \times H^2(0,1)} \leq C\|(f, g)\|_{\mathbb{H}}$$

pour une certaine constante  $C > 0$ . Par conséquent, la compacité de  $\mathbb{A}^{-1}$  sur  $\mathbb{H}$  découle du théorème d'inclusion de Sobolev. D'où le spectre de  $\mathbb{A}$  est formé des valeurs propres isolées. Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathbb{A}$  alors son conjugué  $\bar{\lambda}$  l'est aussi.

ii) Soit maintenant  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathbb{A}$  et  $(\Psi, \Phi)$  sa fonction propre associée :  $\mathbb{A}(\Psi, \Phi) = \lambda(\Psi, \Phi)$ , implique

$$\Psi = \lambda^{-1}\Phi, \quad -(1/\rho(x))(EI(x)\Psi''(x))'' = \lambda\Phi(x), \quad 0 < x < 1,$$

donc  $\Phi \neq 0$  satisfait

$$\lambda^2 \rho(x)\Phi(x) + (EI(x)\Phi''(x))'' = 0, \quad 0 < x < 1,$$

puisque  $(\Psi, \Phi) \in D(\mathbb{A})$  alors  $(\lambda^{-1}\Phi, \Phi)$  est une fonction propre associée à  $\lambda$  et  $\Phi \neq 0$  satisfait le système (2.9).

iii) Nous allons maintenant étudier le problème (2.9). Si on réécrit (2.9) sous forme d'un problème aux valeurs propres standard pour un opérateur différentiel linéaire avec des conditions homogènes et généralisées à la frontière et on effectue la transformation en espace par un scaling :

$$\Phi(x) = f(z), \quad z = z(x) = (1/p) \int_0^x \eta(s) ds. \quad (2.14)$$

Alors un calcul direct montre que  $f$  vérifie le système (5.1) (voir annexe 5.1).

Ensuite, nous effectuons le changement de fonctions comme il a été fait par M.A. Naimark [8].

$$f(z) = e^{-\frac{1}{4} \int_0^z a(s) ds} g(z). \quad (2.15)$$

alors un simple calcul montre que  $g$  satisfait le système (5.4) (voir annexe 5.1).

Puisque le système (2.8) est dissipatif, toutes les valeurs propres sont localisées à gauche du demi plan complexe, et du fait que les valeurs propres sont conjuguées deux à deux, alors nous considérons seulement les valeurs propres  $\lambda = \tau^2/p^2$  avec  $(\pi/2) \leq \arg \lambda \leq \pi$  donc  $(\pi/4) \leq \arg \tau \leq (\pi/2)$

Maintenant, posons  $\omega_j = ((-1)^j + i)/\sqrt{2}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\omega_3 = -\omega_2$ ,  $\omega_4 = -\omega_1$  et

$$S = \left\{ \tau; \frac{\pi}{4} \leq \arg \tau \leq \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (2.16)$$

Dans tout ce qui suit,  $\tau$  est supposé toujours un élément de  $S$ . Notons que

$$\begin{aligned} \Re(\tau\omega_1) &= -|\tau| \sin(\arg \tau + \frac{\pi}{4}) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}|\tau| < 0, \\ \Re(\tau\omega_2) &= |\tau| \cos(\arg \tau + \frac{\pi}{4}) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Soit  $g$  une solution du système (5.4). On peut trouver quatre constantes  $d_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  telles que

$$g(z) = d_1g_1(z) + d_2g_2(z) + d_3g_3(z) + d_4g_4(z), \quad (2.18)$$

où les  $g_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  sont définies par le théorème 2.4 de la section 4, chapitre 2 dans Naimark [8]. En utilisant les conditions au bord de (5.4) et le lemme 3.1 [8] et puisque

$$\begin{aligned} |e^{\tau\omega_2}| &= e^{|\tau|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\arg \tau) - \sin(\arg \tau))} \leq 1, \\ e^{\tau\omega_1} &= O(e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}|\tau|}) \text{ quand } |\tau| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.19)$$

alors on peut montrer que  $g(z)$  est solution non nulle si et seulement si  $\tau$  est racine de son déterminant caractéristique :

$$\det \begin{pmatrix} [1] & [1] & [1] & [1] \\ \tau\omega_1[1] & \tau\omega_2[1] & \tau\omega_3[1] & \tau\omega_4[1] \\ \tau^3\omega_1e^{\tau\omega_1}[1] & \tau^3\omega_2e^{\tau\omega_2}[1] & \tau^3\omega_3e^{\tau\omega_3}[1] & \tau^3\omega_4e^{\tau\omega_4}[1] \\ \tau^3K_1e^{\tau\omega_1}[1] & \tau^3K_2e^{\tau\omega_2}[1] & \tau^3K_3e^{\tau\omega_3}[1] & \tau^3K_4e^{\tau\omega_4}[1] \end{pmatrix} = 0, \quad (2.20)$$

où  $[1] = 1 + O(\tau^{-1})$ ,  $K_i = \omega_i^3 - K\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  et 4 avec

$$K = (c_{25}\mu_{12} + 2c_{11}\mu_{22})/p^2$$

Tout calcul fait montre que (2.20) se réduit à

$$e^{2\tau\omega_2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_2} + O(\tau^{-1}) = -i + O(\tau^{-1}) \quad (2.21)$$

En résolvant (2.21), nous obtenons (2.10) par application du théorème de Rouché. Par conséquent,  $\lambda_n = \tau_n^2/p^2$  est géométriquement simple pour  $n$  assez grand.

iv) Le résultat découle directement des transformations (2.14) et (2.15).

En effet,  $\Phi_n(x) = f_n(z) = e^{-\frac{1}{4} \int_0^z a(s) ds} g_n(z)$  alors nous obtenons (2.11). De plus, puisque  $\tau_n^{-2} f_n''(z) e^{\frac{1}{4} \int_0^z a(s) ds} = \tau_n^{-2} g_n''(z) + O(n^{-1})$  alors

$$\tau_n^{-2} \Phi_n''(x) = \frac{1}{p^2} \eta^2(x) \tau_n^{-2} f_n''(z) + \frac{1}{4p} \eta^{-3}(x) \eta'(x) \tau_n^{-2} f_n'(x),$$

or  $\tau_n^{-2} f_n'(z) = O(n^{-1})$ . Nous déduisons donc de ce qui précède le résultat souhaité (2.12). Ce qui achève la preuve de la proposition 2.1.  $\square$

### 3. Construction d’une base de Riesz de l’espace de lénergie

Dans toute la suite de ce travail, nous supposons que l’hypothèse suivante est satisfaite :

$$\|EI'\|_{L^2(0,1)} < \min_{0 \leq x \leq 1} EI(x) \tag{3.1}$$

Cette hypothèse est utilisée pour montrer la coercivité d’un système de référence non contrôlé qui sera défini ci-dessous.

Maintenant, nous sommes en mesure d’énoncer le résultat principal de cette étude à savoir la propriété de base de Riesz du système (1.1).

**Théorème 3.1.** *L’opérateur  $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$  est défini par (2.6) et (2.7). Alors :*

- i) *Il existe une suite de fonctions propres généralisées de  $\mathbb{A}$  convenablement normalisée qui forme une base de Riesz pour l’espace de l’énergie  $\mathbb{H}$ .*
- ii) *Le développement asymptotique des valeurs propres  $(\lambda_n, \bar{\lambda}_n)$  de  $\mathbb{A}$  est donné par(2.10).*
- iii) *Pour tout  $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$  de module suffisamment grand est algébriquement simple. Par conséquent,  $\mathbb{A}$  engendre un  $C_0$ -semi-groupe  $e^{\mathbb{A}t}$  et nous obtenons  $\omega(\mathbb{A}) = S(\mathbb{A})$ , où*

$$\omega(\mathbb{A}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|e^{\mathbb{A}t}\|} \text{ et } S(\mathbb{A}) = \sup\{\Re \lambda / \lambda \in \sigma(\mathbb{A})\}.$$

*Démonstration.* Pour montrer que l'opérateur  $\mathbb{A}$  satisfait les hypothèses du théorème de Bari-Guo [5], nous avons besoin d'une base de Riesz de référence. Pour cela nous considérons le système (1.1) avec

$$\frac{1}{\mu_{12}} = \mu_{21} = \mu_{11} = \mu_{22} = \alpha = \beta = 0;$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \rho(x)y_{tt}(x,t) + (EI(x)y_{xx}(x,t))_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ y(0,t) = y_x(0,t) = (EI(x)y_{xx})_x(1,t) = y_{xt}(1,t) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous introduisons l'opérateur noté  $\mathbb{A}_0$  associé au système (3.2) :

$$\begin{cases} \mathbb{A}_0(u,v) = (v, -1/\rho(\cdot)(EI(\cdot)u''(\cdot))''), \\ D(\mathbb{A}_0) = \{(u,v) \in \mathbb{X} / v'(1) = (EI(\cdot)u''(\cdot))'(1) = 0\}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous avons le résultat suivant dont la preuve est donnée dans l'annexe 5.3.

**Lemme 3.2.**

- i) *L'opérateur  $\mathbb{A}_0$  est maximal monotone et anti-adjoint. De plus la résolvante  $(I - \mu_0 \mathbb{A}_0)^{-1}$  est compacte dans l'espace d'énergie  $\mathbb{H}$  pour un certain paramètre positif  $\mu_0$  assez grand.*
- ii) *Soit  $\nu_n \in \sigma(\mathbb{A}_0)$  avec  $|\nu_n|$  suffisamment grand, alors  $\nu_n$  est géométriquement simple, elle est aussi algébriquement simple. Les valeurs propres  $(\nu_n, \bar{\nu}_n)$  et les fonctions propres associées*

$$\{(\nu_n^{-1}\Psi_n, \Psi_n) \cup \{\text{leurs conjuguées}\}\}$$

*ont les mêmes comportements asymptotiques donnés dans la proposition 2.1 (2.10) et iv) (2.11)-(2.12).*

Il en résulte donc qu'on peut trouver  $N > 0$  tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|(\lambda_n^{-1}\Phi_n, \Phi_n) - (\nu_n^{-1}\Psi_n, \Psi_n)\|_{\mathbb{H}}^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} O(n^{-2}) < +\infty.$$

Nous avons le même résultat pour leurs conjuguées. Par conséquent, par application du théorème de Bari-Guo [5, Théorème 3.3], toutes les conditions de ce théorème sont satisfaites pour l'opérateur  $\mathbb{A}$ ,  $x_n = (\lambda_n^{-1}\Phi_n, \Phi_n)$  et  $z_n = (\nu_n^{-1}\Psi_n, \Psi_n)$ . Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.  $\square$

**Théorème 3.3.** *Le système (1.1) est exponentiellement stable c'est-à-dire il existe des constantes strictement positives  $M, \omega$  telles que pour toute donnée initiale  $Y_0 \in \mathbb{H}$ , nous avons*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0 .$$

*Démonstration.* Puisque le taux optimal de décroissance de l'énergie  $\omega(\mathbb{A})$  égale à l'abscisse spectral  $S(\mathbb{A})$  de l'opérateur  $\mathbb{A}$ , alors le système (1.1) est exponentiellement stable si et seulement si on peut trouver une constante  $\omega > 0$  telle que  $\Re \epsilon(\lambda) < -\omega$  pour tout  $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ .

Tout d'abord, nous avons le résultat suivant dont la preuve est donnée dans l'annexe 5.4

**Lemme 3.4.** *Soit  $\lambda_n$  défini par (2.10) Alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Re \epsilon(\lambda_n) = -(L/16) \int_0^1 \rho(x) e^{-\frac{1}{2} \int_0^x a(s) ds} dx < 0,$$

avec

$$L = (16/\mu_{12}) e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 a(s) ds} \\ \{\mu_{12}\mu_{21} - (\mu_{11} + \mu_{22})^2 + (\mu_{22} - \mu_{11})^2 + \rho(1)EI(1)\} > 0.$$

D'après le résultat du lemme 3.4 et puisque  $\omega(\mathbb{A}) = S(\mathbb{A})$ , alors le système (1.1) est exponentiellement stable si et seulement si  $\Re \epsilon(\lambda) < 0 \forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ . Puisque le système est dissipatif, alors  $\forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A})$  on a  $\Re \epsilon(\lambda) \leq 0$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$  tel que  $\Re \epsilon(\lambda) = 0$ . La fonction propre correspondante à  $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$  s'écrit sous la forme  $Y = (\lambda^{-1}\Phi, \Phi)$  où  $\Phi \neq 0$  vérifiant le système (2.9). Nous avons

$$(\mathbb{A}Y, Y)_{\mathbb{H}} = \int_0^1 (-\lambda^{-1}(EI\Phi'')'\bar{\Phi} + \bar{\lambda}^{-1}EI|\Phi''|^2)(x) dx \\ + \lambda^{-1}(\alpha|\Phi'|^2 + \beta|\Phi|^2)(1) \quad (3.4)$$

et par intégration par parties nous obtenons

$$\int_0^1 (EI(x)\Phi''(x))'\bar{\Phi}(x) dx = \lambda(\mu_{21}|\Phi(1)|^2 + 2\mu_{22}\Phi'(1)\bar{\Phi}(1) \\ + 2\mu_{11}\Phi(1)\bar{\Phi}'(1) + \mu_{12}|\Phi'(1)|^2) \\ + \int_0^1 EI(x)|\Phi''(x)|^2 dx + \alpha|\Phi'(1)|^2 + \beta|\Phi(1)|^2, \quad (3.5)$$

donc nous déduisons de (3.4) et (3.5) l'inégalité suivante :

$$\Re(\Delta Y, Y)_{\mathbb{H}} \leq -\mu_{21}|\Phi(1)|^2 - 2(\mu_{11} + \mu_{22})|\Phi(1)\Phi'(1)| + \mu_{12}|\Phi'(1)|^2. \quad (3.6)$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \Re(\Delta Y, Y)_{\mathbb{H}} &= \Re\left(\int_0^1 \{\lambda\rho\Phi\bar{\Phi} + \bar{\lambda}^{-1}EI\Phi''\bar{\Phi}''\}(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}^{-1}(\alpha|\Phi'|^2 + \beta|\Phi|^2)(1)\right) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

ce qui implique que

$$0 \leq -(\mu_{21}|\Phi(1)|^2 - 2(\mu_{11} + \mu_{22})|\Phi(1)\Phi'(1)| + \mu_{12}|\Phi'(1)|^2) \quad (3.8)$$

1) Nous distinguons deux cas :

- Si  $\mu_{12}\mu_{21} > (\mu_{11} + \mu_{22})^2$  alors en utilisant (3.7) et (3.8) on peut montrer que  $\Phi(1) = \Phi'(1) = 0$  et le système (2.9) devient :

$$\begin{cases} \lambda^2\rho(x)\Phi(x) + (EI(x)\Phi''(x))'' = 0, & 0 < x < 1, \\ \Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi(1) = \Phi''(1) = \Phi'''(1) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

qui est bien le système (58) étudié par B. Zhu Guo [4] qui admet zéro comme solution unique.

- Si ( $\mu_{12} > 0$ ,  $\mu_{21} = \mu_{11} = \mu_{22} = 0$ ) alors nous avons  $\Re(\Delta Y, Y)_H = -\mu_{12}|\Phi'(1)| = 0$  et le système (2.9) devient :

$$\begin{cases} \lambda^2\rho(x)\Phi(x) + (EI(x)\Phi''(x))'' = 0, & 0 < x < 1, \\ \Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi'(1) = \Phi''(1) = \Phi'''(1) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Nous procédons en deux étapes pour prouver que l'unique solution du système (3.10) est la fonction nulle.

*Étape 1 :* Montrons que  $\Phi'$  a au moins un zéro dans  $[0,1]$ . En effet, puisque  $\Phi'(0) = \Phi'(1) = 0$  donc d'après le théorème de Rolle il existe  $\xi_1 \in (0, 1)$  tel que  $\Phi''(\xi_1) = 0$ , or  $\Phi''(1) = 0$  donc d'après le théorème de Rolle, il existe  $\xi_2 \in (\xi_1, 1)$  tel que  $(EI(\xi_2)\Phi''(\xi_2))' = 0$ , or  $(EI(\cdot)\Phi'')'(1) = 0$ . Donc d'après le théorème de Rolle, il existe  $\xi_3 \in (\xi_2, 1)$  tel que  $(EI\Phi''''(\xi_3) = 0$ . Or  $(EI\Phi''''(\xi_3) = -\lambda^2\rho(\xi_3)\Phi(\xi_3) = 0$ , nous appliquons Rolle à nouveau, il existe  $\xi_4 \in (0, \xi_3)$  tel que  $\Phi'(\xi_4) = 0$ .

*Étape 2 :* Montrons que si  $\Phi'$  admet  $n$  zéros différents dans  $(0, 1)$ , alors  $\Phi'$  admet au moins  $n + 1$  zéros différents dans  $[0, 1]$ .

En effet, supposons qu'on ait  $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$  telle que  $\Phi'(\xi_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Puisque  $\Phi'(0) = \Phi'(1) = 0$ , alors d'après le théorème de Rolle il existe  $\eta_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$  tels que  $0 < \eta_1 < \xi_1 < \eta_2 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \eta_{n+1} < 1$  et  $\Phi''(\eta_i) = 0$ . Or  $\Phi''(1) = 0$  donc d'après le théorème

de Rolle il existe  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$  tels que  $0 < \alpha_1 < \eta_1 < \alpha_2 < \eta_2 < \dots < \eta_{n+1} < \alpha_{n+1} < 1$  et  $(EI\Phi''')'(\alpha_i) = 0$ . Puisque  $(EI\Phi''')'(1) = 0$  alors d'après le théorème de Rolle il existe  $\beta_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$  tels que  $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} < 1$  et  $(EI\Phi''')''(\beta_i) = 0$ , et puisque  $(EI\Phi''')''(\beta_i) = -\lambda^2 \rho(\beta_i)\Phi(\beta_i) = 0$ . Donc le théorème de Rolle s'applique : il existe  $\nu_i, i = 1, 2, \dots, n, n + 1$  tels que  $0 < \nu_1 < \beta_1 < \nu_2 < \beta_2 < \dots < \nu_n < \beta_{n+1} < 1 = \nu_{n+1}$  et  $\Phi'(\nu_i) = 0$ . Donc  $\Phi'$  admet une infinité de zéros différents  $(x_i)_1^{+\infty}$  dans  $(0, 1)$ .

Soit  $x_0 \in [0, 1]$  un point d'accumulation des points  $(x_i)_1^{+\infty}$ . Il est évident que  $\Phi^{(i)}(x_0) = 0, i = 1, 2, 3, 4$ . En effet, si  $\Phi'(x_i) = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots$  alors  $\Phi'(x_0) = 0$  et par le théorème des accroissements finis, il existe  $(y_i)_1^{+\infty}$  tels que  $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots$ , et  $\Phi''(y_i) = 0, i = 1, \dots$ . Notons que  $x_0$  est aussi un point d'accumulation des  $(y_i)_1^{+\infty}$ , alors  $\Phi''(x_0) = 0$ . Répétons le processus, nous obtenons  $\Phi^{(i)}(x_0) = 0, i = 1, 2, 3, 4$ .

Notons aussi que  $\Phi'$  satisfait l'équation différentielle ordinaire linéaire  $(\lambda^2 \rho \Phi' - (\rho'/\rho)(EI\Phi''')'' + (EI\Phi''')''')(x) = 0$ .

Par conséquent, par l'unicité de solution des équations différentielles linéaires ordinaires, nous obtenons  $\Phi' = 0$ . Or  $\Phi(0) = 0$  donc  $\Phi = 0$ .

**2)** Si  $\mu_{12}\mu_{21} = (\mu_{11} + \mu_{22})^2 > 0$  alors en utilisant (3.7) et (3.8) on peut montrer que  $\bar{\Phi}(1)\Phi'(1) \in \mathbb{R}$ . Soit  $\Phi'(1) = x_1 + iy_1$  et  $\bar{\Phi}(1) = x_2 + iy_2$ , alors  $\bar{\Phi}(1)\Phi'(1) = x_1x_2 - y_1y_2$  et  $x_1y_2 + y_1x_2 = 0$ .

- Si  $x_2 \neq 0$ , alors en utilisant (3.8) on peut montrer que

$$x_2^2 = (\mu_{12}/\mu_{21})x_1^2.$$

- Si  $x_2 = \pm\sqrt{\mu_{12}/\mu_{21}}x_1$ , alors nous avons

$$\bar{\Phi}(1)\Phi'(1) = \sqrt{\mu_{21}/\mu_{12}}|\Phi(1)|^2. \tag{3.11}$$

En utilisant la condition au bord (2.9)<sub>3</sub> du système (2.9) et le fait que  $\Re(\lambda) = 0$ , nous montrons que :

$$2\alpha EI(1)\Re(\Phi''(1)\bar{\Phi}'(1))/|\lambda|^2 = -2\alpha^2 |\Phi'(1)|^2/|\lambda|^2, \tag{3.12}$$

$$- 2(EI\bar{\Phi}\Phi''(1))/\lambda = (4\mu_{11}|\Phi|^2 + 2(\mu_{12} + \alpha/\lambda)\Phi'\bar{\Phi})(1), \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} (EI^2|\lambda^{-1}\Phi''|^2)(1) &= (4\mu_{11}^2|\Phi|^2 + 4\mu_{11}\mu_{12}\bar{\Phi}\Phi' + \mu_{12}^2|\Phi'|^2)(1) \\ &+ \alpha^2|\lambda^{-1}\Phi'|^2(1) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Nous tirons de (3.8) et de (3.14) la relation

$$(EI^2 |\lambda^{-1}\Phi''|^2)(1) = ((4\mu_{11} + \mu_{12}\mu_{21})|\Phi|^2 + 4\mu_{11}\sqrt{\mu_{12}\mu_{21}}|\Phi|^2 + \alpha^2 |\lambda^{-1}\Phi'|^2)(1) \quad (3.15)$$

Si nous posons

$$Q = \mu_{12}^{-1}(|\Phi|^2\{\mu_{21}\mu_{12} - 4\mu_{11}\mu_{22}\} - 2EI(\mu_{22} - \mu_{11})\bar{\Phi}\lambda^{-1}\Phi'' + EI^2|\lambda^{-1}\Phi''|^2 - 2\alpha(\mu_{22} - \mu_{11})\bar{\Phi}\lambda^{-1}\Phi' + \alpha^2 |\lambda^{-1}\Phi'|^2 + 2\alpha EI \Re(\lambda^{-1}\Phi'\bar{\lambda}^{-1}\bar{\Phi}''))(1), \quad (3.16)$$

En tenant compte de (3.11)–(3.14) et du fait que  $\mu_{12}\mu_{21} = (\mu_{11} + \mu_{22})^2$  alors  $Q$  se réduit à

$$Q = 2\mu_{12}^{-1}(\mu_{11} + \mu_{22})|\Phi(1)|^2(\mu_{11} + \mu_{22} + \sqrt{\mu_{12}\mu_{21}}).$$

Puisque nous avons

$$\Im\lambda (2\Re\lambda \int_0^1 \rho(x)|\Phi(x)|^2 dx + Q) = 0 \text{ et } \Im\lambda \neq 0,$$

alors nous obtenons  $Q = 0$ , donc  $\Phi(1) = 0$ . Par conséquent,  $\Phi$  satisfait le système (3.10) qui admet la fonction nulle comme solution unique.

Si  $x_2 = 0$  alors nous avons  $x_1 = 0$  ou  $y_2 = 0$ .

- Si  $x_1 = 0$  alors nous obtenons aussi (3.11) et par suite  $\Phi(1) = 0$ , ainsi le cas précédent s'applique. Donc  $\Phi$  est identiquement nulle.
- Si  $y_2 = 0$  alors nous avons  $\Phi'(1) = \Phi(1) = 0$  et nous concluons comme dans le cas précédent.

□

*Remarque 3.5.* Le cas limite  $\mu_{12}\mu_{21} = (\mu_{11} + \mu_{22})^2 > 0$  ne peut pas être traité en utilisant la méthode des multiplicateurs même si on se place dans le cas uniforme du système (1.1) c'est-à-dire où les fonctions  $\rho$  et  $EI$  sont des constantes.

#### 4. Simulation numérique

Dans cette section, nous allons utiliser la méthode des différences finies [1], [10] pour étudier numériquement le spectre de l'opérateur associé au système (1.1). Ensuite, nous appliquerons la méthode QZ [7],[2]. Enfin, nous étudierons l'influence des paramètres figurant dans les lois de contrôle sur la vitesse de convergence de l'énergie associée aux problème (1.1).

La poutre est caractérisée par la densité de masse et la rigidité de flexion :

$$\rho(x) = (x + 1)^2, \quad EI(x) = (x + 1)^4.$$

Dans toute la suite, nous notons  $g$  par  $y$  et  $z(x)$  par  $x$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h = \frac{1}{n}$  et  $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n$ .

Nous utilisons les formules aux différences finies centrées pour approcher  $y'(x_i)$ ,  $y''(x_i)$  et  $y^{(4)}(x_i)$ , pour  $i = 2, \dots, n - 2$ .

Nous utilisons (5.25)–(5.27) et (5.31)–(5.33) (voir annexe 5.5), alors un schéma basé sur des différences centrées pour le problème (5.4) revient à chercher les  $y_i$  censées être proches de  $y(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i-2} + a_i y_{i-1} + (b_i + \lambda^2 p^4 h^4) y_i + c_i y_{i+1} + d_i y_{i+2} = 0, \quad i = 2, \dots, n - 2 \\ y_0 = 4y_1 - y_2 = 0, \\ y_{n-2}(\lambda h c_{13} \mu_{12} + e) - y_{n-1}(4h \lambda c_{13} \mu_{12} + f) \\ + y_n(4h^2 \lambda c_{11} \mu_{11} + 2\lambda h^2 c_{12} \mu_{12} + 3h \lambda c_{13} \mu_{12} + g) = 0. \\ 2y_{n-3} + (3\lambda h^2(c_{25} \mu_{12} + 2c_{11} \mu_{22}) + k) y_{n-2} \\ - (12\lambda h^2(c_{25} \mu_{12} + 2c_{11} \mu_{22}) - l) y_{n-1} + \\ + (12\lambda h^3(c_{21} \mu_{11} + c_{22} \mu_{21} + c_{23} \mu_{12} + c_{24} \mu_{22}) + \\ + 9\lambda h^2(c_{25} \mu_{12} + 2c_{11} \mu_{22}) + q) y_n = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} a_i &= h^2 a_{1i} - 4, \quad b_i = 6 - 2h^2 a_{1i} - \frac{3}{2} h^3 a_{2i} + h^4 a_{3i}, \\ c_i &= a_{1i} h^2 + 2a_{2i} h^3 - 4, \quad d_i = 1 - \frac{h^3 a_{2i}}{2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

et  $e, f, g, k, l$  et  $q$  sont des constantes réelles définies par :

$$\begin{aligned} e &= 2 + h a_{22}, \quad f = 4(1 + h a_{22}), \quad g = 2h^2 a_{11} + 3h a_{22}, \\ k &= 3h^2 b_{22} - 6, \quad l = 6 - 12h^2 b_{22}, \quad q = 6h^3 b_{11} + 9h^2 b_{22} - 2 \end{aligned}$$

Afin de faire apparaître la condition de dissipation dans la dernière équation du problème (4.1), nous allons modifier cette dernière équation en multipliant l'équation (4.1)<sub>3</sub> (resp. (4.1)<sub>4</sub>) par  $3h(c_{25} \mu_{12} + 2c_{11} \mu_{22})$  (resp.  $c_{13} \mu_{12}$ ), puis nous soustrayons ces deux équations membre à membre, nous obtenons

$$\begin{aligned} &2c_{13} \mu_{12} y_{n-3} + y_{n-2}(k c_{13} \mu_{12} - 3eh(c_{25} \mu_{12} + 2c_{11} \mu_{22})) + y_{n-1}(l c_{13} \mu_{12} \\ &+ 3fh(c_{25} \mu_{12} + 2c_{11} \mu_{22})) + y_n(q c_{13} \mu_{12} - 3gh(c_{25} \mu_{12} + 2c_{11} \mu_{22})) \\ &+ 6\lambda h^3(2c_{13} c_{22} \mu_{12} \mu_{21} - 4c_{11}^2 \mu_{11} \mu_{22}) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

POUTRES D'EULER-BERNOULLI À COEFFICIENTS VARIABLES

Nous écrivons le système (4.1)<sub>1</sub>, (4.1)<sub>2</sub> et (4.3) sous forme matricielle suivante :

$$\lambda^2 PY + \lambda QY + RY = 0, Y = (y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (4.4)$$

Les matrices  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont définies comme suit :

$$P_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ p^4 h^4 & \text{si } i = 2, \dots, n-2, \end{cases} \quad P_{nj} = \begin{cases} P_{n-j+4} & \\ 0 & \text{si } j \in \{1, \dots, n-4\}, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$P_{n-1j} = \begin{cases} P_{j-n+3} & \text{si } j \notin \{n-2, n-1, n\}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$P_{ij} = 0, \quad i \neq j \text{ et } (i, j) \in \{1 \dots n-2\},$$

Où

$$P_1 = hc_{13}\mu_{12}, \quad P_2 = -4hc_{13}\mu_{12}, \quad P_3 = 2h^2(2c_{11}\mu_{11} + c_{12}\mu_{12}) + 3hc_{13}\mu_{12}, \quad (4.7)$$

$$P_4 = qc_{13} - 3ghc_{25} \text{ si } \mu_{21} = 0, \quad (4.8)$$

$$P_5 = \begin{cases} lc_{13} + fhc_{25} & \text{si } \mu_{21} = 0, \\ 0 & \text{si } \mu_{21} > 0, \end{cases}, \quad P_6 = \begin{cases} kc_{13} - ehc_{25} & \text{si } \mu_{21} = 0, \\ 0 & \text{si } \mu_{21} > 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$P_7 = \begin{cases} 2c_{13} & \text{si } \mu_{21} = 0, \\ 0 & \text{si } \mu_{21} > 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$Q_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \{1, \dots, n-2\}, \quad (4.11)$$

$$Q_{nj} = \begin{cases} q_{n-j+4} & \text{si } j \in \{n-3, n-2, n-1, n\}, \\ 0 & \text{si } j \in \{1, \dots, n-4\}, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$Q_{n-1j} = \begin{cases} q_{j-n+3}, & \text{si } j \in \{n-2, n-1, n\}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

Où

$$q_1 = e, \quad q_2 = -f, \quad q_3 = g,$$

$$q_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{21} = 0, \\ qc_{13}\mu_{12} - 3gh(c_{25}\mu_{12} + 2c_{11}\mu_{22}) & \text{si } \mu_{21} > 0, \end{cases}$$

$$q_5 = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{21} = 0, \\ lc_{13}\mu_{12} + 3fh(c_{25}\mu_{12} + 2c_{11}\mu_{22}) & \text{si } \mu_{21} > 0, \end{cases}$$

$$q_6 = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{21} = 0, \\ kc_{13}\mu_{12} - 3eh(c_{25}\mu_{12} + 2c_{11}\mu_{22}) & \text{si } \mu_{21} > 0, \end{cases}$$

$$q_7 = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{21} = 0, \\ 2c_{13}\mu_{12} & \text{si } \mu_{21} > 0, \end{cases}$$

$$R_{ij} = 0 \text{ si } |i - j| \geq 5, \quad (4.13)$$

Pour  $i \in \{2, \dots, n - 2\}$  nous avons

$$R_{ij} = \begin{cases} b_i & \text{si } i = j, \\ a_i & \text{si } j = i - 1, \\ c_i & \text{si } j = i + 1, \\ d_i & \text{si } j = i + 2, \\ 1 & \text{si } j = i - 2, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$R_{1j} = 0 \text{ si } j \in \{1, \dots, n\} \text{ et } R_{ij} = 0 \text{ si } (i, j) \in \{n - 1, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4.15)$$

À partir de (4.4) et en introduisant le terme auxiliaire suivant :

$$Z = \lambda Y, \quad (4.16)$$

ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} PZ = \lambda PY, \\ -RY = \lambda PZ + \lambda QY \end{cases} \quad (4.17)$$

Il est facile de vérifier qu'on se ramène à un problème de valeurs propres généralisées qu'on résout en utilisant la méthode QZ :

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = \lambda\mathcal{B}\mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = (Z, Y)^T \quad (4.18)$$

Les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont définies par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -R \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ P & Q \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

1. On fixe les valeurs de  $\alpha = 1, \beta = 2, \mu_{11} = \mu_{21} = \mu_{22} = 0$ , puis on fait varier  $\mu_{12}$ . On constate que plus on augmente la valeur de  $\mu_{12}$ , plus que le spectre se déplace vers la droite en fonction de la croissance de  $\mu_{12}$ .

2. On fixe les valeurs de  $\alpha = 1, \beta = 2, \mu_{11} = 1, \mu_{22} = 2, \mu_{21} = 10$ , puis on fait varier  $\mu_{12}$ . On constate que plus on augmente la valeur de  $\mu_{12}$ , plus que le spectre se déplace vers la gauche en fonction de la croissance de  $\mu_{12}$ .

3. On fixe les valeurs de  $\alpha = 1, \beta = 2, \mu_{11} = 1, \mu_{22} = 2, \mu_{12} = 2$ , puis on fait varier  $\mu_{21}$ . On constate que plus on augmente la valeur de  $\mu_{21}$ , plus que le spectre se déplace vers la gauche en fonction de la croissance de  $\mu_{21}$ .

POUTRES D'EULER-BERNOULLI À COEFFICIENTS VARIABLES

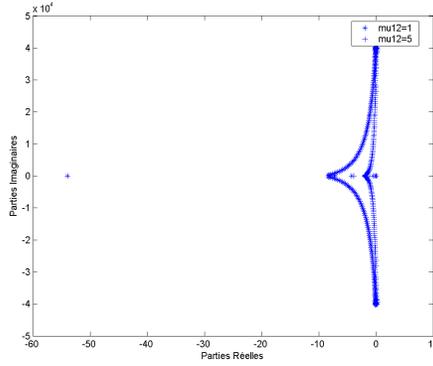


FIGURE 1. Distribution des valeurs propres  $\mu_{12} = 1, 5$ .

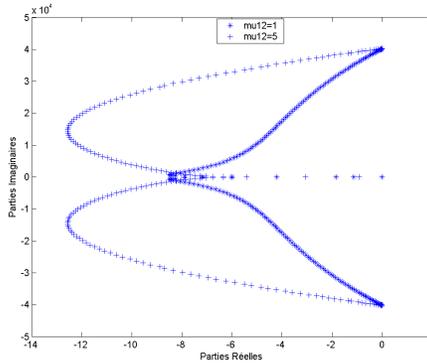


FIGURE 2. Distribution des valeurs propres  $\mu_{12} = 1, 5$ .

4. On fixe les valeurs de  $\alpha = 1, \beta = 2, \mu_{12} = 10, \mu_{21} = 5, \mu_{22} = 1$ , puis on fait varier  $\mu_{11}$ . On constate que plus on augmente la valeur de  $\mu_{11}$ , plus que le spectre se déplace vers la droite en fonction de la croissance de  $\mu_{11}$ .

5. On fixe les valeurs de  $\alpha = 1, \beta = 2, \mu_{12} = 10, \mu_{11} = 1, \mu_{21} = 5$ , puis on fait varier  $\mu_{22}$ . On constate que plus on augmente la valeur de  $\mu_{22}$ , plus que le spectre se déplace vers la droite en fonction de la croissance de  $\mu_{22}$ .

6. On fixe les valeurs de  $\mu_{12} = 5, \beta = 1, \mu_{11} = 1, \mu_{21} = 10, \mu_{22} = 2$ , puis on fait varier  $\alpha$ . On constate que la variation de  $\alpha$ , n'entraîne aucune perturbation du spectre.

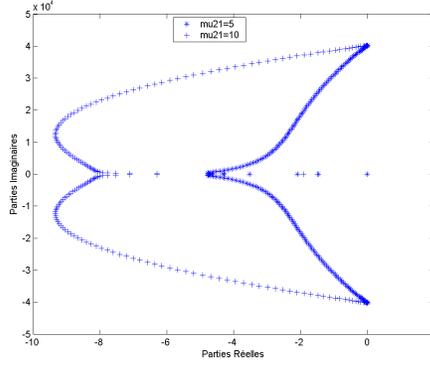


FIGURE 3. Distribution des valeurs propres  $\mu_{21} = 1, 5$ .

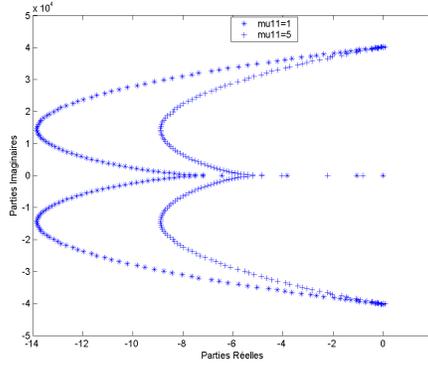


FIGURE 4. Distribution des valeurs propres  $\mu_{11} = 1, 5$ .

7. On fixe les valeurs de  $\mu_{12} = 5, \alpha = 2, \mu_{11} = 1, \mu_{21} = 10, \mu_{22} = 2$ , puis on fait varier  $\beta$ . On constate que la variation de  $\beta$ , n'entraîne aucune perturbation du spectre.

# POUTRES D'EULER-BERNOULLI À COEFFICIENTS VARIABLES

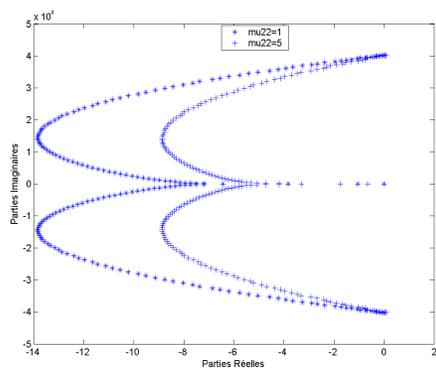


FIGURE 5. Distribution des valeurs propres  $\mu_{22} = 1, 5$ .

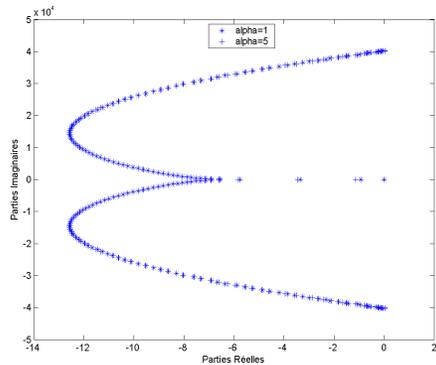


FIGURE 6. Distribution des valeurs propres  $\alpha = 1, 5$ .

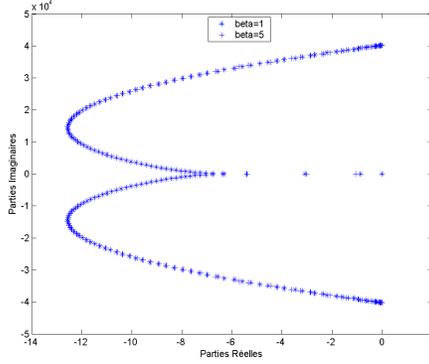


FIGURE 7. Distribution des valeurs propres  $\beta = 1, 5$ .

## 5. Annexe

### 5.1. Systèmes vérifiés par $f$ et $g$

La fonction  $f$  vérifie le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(4)}(z) + a(z)f'''(z) + b(z)f''(z) + c(z)f'(z) + \lambda^2 p^4 f(z) = 0, \\ f(0) = f'(0) = 0, \\ -f'''(1) = (2\lambda\mu_{11}p^2/EI(1))\eta^{-2}(1)f(1) + \{(\lambda\mu_{12}p/EI(1))\eta^{-1}(1) \\ + a_0\}f'(1), \\ f'''(1) = \{((2\lambda\mu_{11}p^3EI'(1)/EI^2(1)) + (\lambda\mu_{21}p^3/EI(1)))\eta^{-3}(1) \\ (6\lambda\mu_{11}p^3/EI(1))\eta^{-4}(1)\eta'(1) + b_0\}f(1) + \{((\lambda\mu_{12}p^2EI'(1)/EI^2(1)) + \\ (2\lambda\mu_{22}p^2/EI(1)))\eta^{-2}(1) + (3\lambda\mu_{12}p^2/EI(1))\eta^{-3}(1)\eta'(1) + c_0\}f'(1), \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où  $a(z)$  est définie par (2.13) et les fonctions  $b(z)$  et  $c(z)$  sont définies par

$$b(z) = p^2(\eta^{-3}(3\eta^{-1}\eta'^2 + 4\eta'' + (6\eta'EI' + \eta EI'')/EI))(x), \quad (5.2)$$

$$c(z) = p^3\eta^{-4}(\eta''' + (2\eta''EI' + \eta'EI'')/EI)(x), \quad (5.3)$$

et  $a_0, b_0$  et  $c_0$  sont définies par :

$$\begin{aligned} a_0 &= -p(\eta^{-2}\eta' + \alpha(\eta^{-1}/EI))(1), \quad b_0 = \beta p^3(\eta^{-3}/EI)(1), \\ c_0 &= p^2\eta^{-2}(1)(-\eta^{-1}(\eta'' + 3\eta'(\eta^{-1}\eta' + \alpha/EI)) + \alpha EI'/EI^2)(1), \end{aligned}$$

La fonction  $g$  satisfait le système suivant

$$\begin{cases} g^{(4)}(z) + a_1(z)g''(z) + a_2(z)g'(z) + a_3(z)g(z) + \lambda^2 p^4 g(z) = 0, \\ g(0) = g'(0) = 0, \\ -g''(1) = (2\lambda c_{11}\mu_{11} + c_{12}\lambda\mu_{12} + a_{11})g(1) + (\lambda c_{13}\mu_{12} + a_{22})g'(1), \\ g'''(1) = (c_{21}\lambda\mu_{11} + c_{22}\lambda\mu_{21} + c_{23}\lambda\mu_{12} + c_{24}\lambda\mu_{22} + b_{11})g(1) + \\ (c_{25}\lambda\mu_{12} + 2c_{11}\lambda\mu_{22} + b_{22})g'(1). \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont des fonctions régulières définies par :

$$a_1(z) = -(3a'(z)/2) - (3a^2(z)/8) + b(z), \quad (5.5)$$

$$a_2(z) = (a^3(z)/8) - a''(z) - (a(z)b(z)/2) + c(z), \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} a_3(z) = & (3a'^2(z)/16) - (a'''(z)/4) - (3a^4(z)/256) + (3a^2(z)a'(z)/32) \\ & + b(z)((a^2(z)/16) - (a'(z)/4)) - (a(z)c(z)/4). \end{aligned} \quad (5.7)$$

et  $c_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 5$  sont des constantes réelles définies par :

$$\begin{aligned} c_{11} = & (p^2\eta^{-2}/EI)(1), \quad c_{12} = -(ap\eta^{-1}/4EI)(1), \quad c_{13} = (p\eta^{-1}/EI)(1), \\ c_{21} = & 2p^3\eta^{-3}(1)((EI'/EI^2) + (3\eta^{-1}\eta'/EI))(1) - (3ap^2\eta^{-2}/2EI)(1), \\ c_{22} = & (p^3\eta^{-3}/EI)(1), \quad c_{23} = -(ap^3\eta^{-3}/4)(1)((EI'\eta/pEI^2) \\ & + (3\eta'/pEI))(1) + (3a^2p\eta^{-1}/16EI)(1), \quad c_{24} = -(ap^2\eta^{-2}/2EI)(1), \\ c_{25} = & p^3\eta^{-3}(1)((EI(1)\eta/pEI^2) + (3\eta'/pEI))(1) - (3ap\eta^{-1}/4EI)(1), \end{aligned}$$

et  $a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22}$  sont données par

$$\begin{aligned} a_{11} = & -(a'/4)(1) + (a^2/16)(1) - \\ & (a(1)/4)((\alpha p\eta^{-1}/EI)(1)) + p\eta^{-2}(1)\eta'(1), \\ a_{22} = & a_0 - (a(1)/2), \quad b_{11} = b_0 - (a(1)c_0/4) - (3a(1)a_{11}/4) - A(1), \\ b_{22} = & c_0 - (3a(1)a_{22}/4) - B(1), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A(1) = & -(a''(1)/4) + (3a(1)a'(1)/16) - (a^3(1)/64), \\ B(1) = & -(3a'(1)/4) + (3a^2(1)/16), \quad C(1) = -(3a(1)/4). \end{aligned} \quad (5.8)$$

## 5.2. Comportement asymptotique des fonctions $g_n^{(1)}, g_n^{(2)}$

Avec l'expression asymptotique donnée dans le lemme 3.1 [8] et par l'utilisation de la relation (2.18) et (2.20), on peut écrire  $g_n^{(k)}(z), k = 0, 1, 2$

ainsi

$$g_n^{(k)}(z) = \tau_n^k \det \begin{bmatrix} [1] & [1] & e^{\tau_n \omega_2} [1] & e^{\tau_n \omega_1} [1] \\ \omega_1^k e^{\tau_n \omega_1 z} [1] & \omega_2^k e^{\tau_n \omega_1 z} [1] & \omega_3^k e^{\tau_n \omega_1 z} [1] & \omega_4^k e^{\tau_n \omega_1 z} [1] \\ \omega_1 e^{\tau_n \omega_1} [1] & \omega_2 e^{\tau_n \omega_2} [1] & -\omega_2 [1] & -\omega_1 [1] \\ K_1 e^{\tau_n \omega_1} [1] & K_2 e^{\tau_n \omega_2} [1] & -K_2 [1] & -K_1 [1] \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

alors, la solution  $g_n$  associée à (5.4) admet le développement asymptotique suivant :

$$g_n(z) = -2(1+i) \left\{ \sin\left(n - \frac{1}{4}\right) \pi z - \cos\left(n - \frac{1}{4}\right) \pi z + e^{-(n-\frac{1}{4})\pi z} \right\} + O(n^{-1}), \quad (5.10)$$

$$\tau_n^{-2} g_n''(z) = 2(i-1) \left\{ \cos\left(n - \frac{1}{4}\right) \pi z - \sin\left(n - \frac{1}{4}\right) \pi z + e^{-(n-\frac{1}{4})\pi z} \right\} + O(n^{-1}), \quad (5.11)$$

De plus, nous avons

$$\tau_n^{-1} g_n'(z) = -\frac{4}{\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(n - \frac{1}{4}\right) \pi z - \sin\left(n - \frac{1}{4}\right) \pi z - e^{-(n-\frac{1}{4})\pi z} \right\} + O(n^{-1}). \quad (5.12)$$

### 5.3. Preuve du lemme 3.2

(i) Soit  $U = (y, z) \in D(\mathbb{A}_0)$ . En utilisant (2.5) avec  $\alpha = \beta = 0$  et (3.3) nous avons

$$(\mathbb{A}_0 U, U)_{\mathbb{H}} = \int_0^1 [(EI(x)y''(x))'z'(x) + EI(x)z''(x)\bar{y}''(x)] dx.$$

En intégrant par parties le premier terme de l'intégrale ci-dessus et puisque  $U \in \mathbb{V} \times H^4(0, 1) \times \mathbb{V}$  alors nous obtenons  $\Re(\mathbb{A}_0 U, U)_{\mathbb{H}} = 0 \quad \forall U \in D(\mathbb{A}_0)$ . Maintenant, montrons la surjection de l'opérateur  $I - \mu_0 \mathbb{A}_0$  pour un certain paramètre positif  $\mu_0$  i.e prouvons que pour tout  $(f, g) \in \mathbb{H}$ , on peut trouver  $(u, v) \in D(\mathbb{A}_0)$  tel que  $(I - \mu_0 \mathbb{A}_0)(u, v) = (f, g)$ . Ceci nous amène d'une façon équivalente à chercher  $(u, v)$  solution du système suivant

$$\begin{cases} u - \mu_0 v = f, & \rho v + \mu_0 (EI(\cdot)u_{xx})_{xx} = \rho g, \\ u(0) = u_x(0) = (EI(\cdot)u_{xx})_x(1) = 0, \\ u_x(1) = f_x(1), \quad (u, v) \in H^4(0, 1) \times \mathbb{V}. \end{cases} \quad (5.13)$$

En éliminant l'inconnue  $v$  du système (5.13) nous obtenons le problème réduit suivant

$$\begin{cases} \rho u + \mu_0^2 (EI(\cdot)u_{xx})_{xx} = \rho(\mu_0 g + f) = F, \\ u_x(1) = f_x(1), \\ (EI(\cdot)u_{xx})_x(1) = u(0) = u_x(0) = 0, \quad u \in H^4(0, 1). \end{cases} \quad (5.14)$$

Maintenant, pour tout couple  $(u, \varphi) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ , nous posons

$$a(u, \varphi) = \int_0^1 (\rho u \varphi dx + \mu_0^2 EI(x) \varphi_{xx} u_{xx}) dx + \varphi_x(1) (\mu_0^2 \int_0^1 EI'(x) u_x dx - 1/2 \int_0^1 x^2 \rho u dx)$$

qui est une forme bilinéaire continue sur  $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ . On définit la forme linéaire continue  $L$  sur  $\mathbb{V}$  par

$$L(\varphi) = \int_0^1 F \varphi dx + \varphi_x(1) (\mu_0^2 EI(1) f_x(1) - 1/2 \int_0^1 x^2 F dx).$$

Grâce à l'hypothèse (3.1) on peut facilement vérifier que la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$  pour un certain paramètre  $\mu_0 > 0$  choisi assez grand. Par le théorème de Lax Milgram, il existe un élément unique  $u$  dans  $\mathbb{V}$  tel que

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \text{ pour tout } \varphi \in \mathbb{V}.$$

Nous déduisons de l'égalité ci-dessus que le système (5.14) admet une solution unique  $u \in H^4(0, 1) \cap \mathbb{V}$ , ce qui implique que  $v = ((u - f)/\mu_0) \in \mathbb{V}$  et par construction  $(u, v) \in D(\mathbb{A}_0)$ . Par conséquent, nous concluons que  $\mathbb{A}_0$  est un opérateur maximal monotone dans l'espace d'énergie  $\mathbb{H}$ . D'autre part, d'après la théorie des équations elliptiques (Lions et Magenes [6]), nous obtenons que  $u \in H^{5/2}(0, 1)$  et que  $\|(u, v)\|_{H^{5/2}(0,1) \times V} \leq C \|(f, g)\|_{\mathbb{H}}$ . En particulier, nous obtenons la compacité de la résolvante  $(I - \mu_0 \mathbb{A}_0)^{-1}$ . Finalement, puisque  $\mathbb{A}_0$  est antisymétrique, maximal monotone et à résolvante compacte, donc  $\mathbb{A}_0$  est anti-adjoint dans  $\mathbb{H}$ . Par conséquent, d'après la théorie générale des opérateurs, toutes les valeurs propres de  $\mathbb{A}_0$  sont localisées dans l'axe imaginaire et il existe une suite de fonctions propres généralisées de  $\mathbb{A}_0$  formant une base de Riesz pour  $\mathbb{H}$ . Dans ce qui suit, nous justifions comment obtenir le comportement asymptotique des valeurs (resp. fonctions) propres de  $\mathbb{A}_0$ .

(ii) La fonction propre associée à  $\nu \in \sigma(\mathbb{A}_0)$  est de la forme  $(\nu^{-1} \Psi, \Psi)$ , où  $\Psi \neq 0$  est solution de l'équation (2.9)<sub>1</sub> en échangeant  $\lambda$  par  $\nu$  et satisfait les conditions aux limites suivantes :

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi'(1) = (EI(\cdot) \Psi'(\cdot))''(1) = 0.$$

En utilisant les mêmes transformations (2.14) et (2.15) alors nous déduisons que  $g$  est solution de l'équation (5.4)<sub>1</sub> en échangeant  $\lambda$  par  $\nu$  (on note (5.4)<sub>1, \nu</sub> cette équation) et satisfait les conditions aux limites suivantes :

$$g(0) = g'(0) = 0, g'(1) = a(1)g(1)/4, g'''(1) = a'(1)(2 + a(1))g(1)/8 + a(1)g''(1)/4. \tag{5.15}$$

En substituant

$$g(z) = \sum_{k=1}^4 d_k g_k(z),$$

où les  $g_k$  sont définies par le théorème 2.4, de la section 4, chapitre 2 de Naimark [8] dans les conditions au bord (5.15) et le lemme 3.1 [8], Il est facile de vérifier que  $g(z)$  est non nulle si et seulement si  $\tau$  est solution de l'équation (2.20) avec  $K = 0$ , puisque le calcul du déterminant dans (2.20) est indépendant de la valeur de  $K$  alors nous avons la même formule (2.21) pour ce problème, par conséquent nous obtenons  $\nu_n = \tau_n^2/p^2$  où la valeur de  $\tau_n$  est donnée dans la formule (2.10).

Soit  $g_n$  la solution du problème (5.4)<sub>1, \nu\_n</sub>-(5.15) associée à  $\nu_n$  alors  $g_n, g'_n, g''_n$  peuvent s'écrire par la formule (5.9) avec  $K = 0$ , puisque le calcul du déterminant (5.9) est indépendant de la valeur de  $K$  alors nous obtenons les mêmes développements asymptotiques (5.10), (5.11) pour  $g_n(z)$  et  $\nu_n^{-2}g''_n(z)$  respectivement, par conséquent le comportement asymptotique des fonctions propres  $(\nu_n^{-1}\Psi_n, \Psi_n)$  découle directement des transformations (2.14) et (2.15).

*Remarque 5.1.* Si  $(\mathbb{A}_0 - \lambda I)^2 x = 0$  où  $x \in \mathbb{X}$ , alors puisque l'opérateur  $\mathbb{A}_0 - \lambda I$  est normal, nous avons

$$\|(\mathbb{A}_0 - \lambda I)(\mathbb{A}_0 - \lambda I)x\| = \|(\mathbb{A}_0 - \lambda I)^*(\mathbb{A}_0 - \lambda I)x\| = 0,$$

par conséquent  $\langle (\mathbb{A}_0 - \lambda I)^*(\mathbb{A}_0 - \lambda I)x, x \rangle_{\mathbb{H}} = 0$  ce qui implique  $(\mathbb{A}_0 - \lambda I)x = 0$ .

### 5.4. Preuve du lemme 3.4

Soit  $(\lambda_n, \Phi_n)$  vérifiant le système (2.9), où  $\Phi_n$  est définie par (2.11). Nous multiplions l'équation (2.9)<sub>1</sub> par la fonction conjuguée  $\bar{\Phi}_n$  puis nous intégrons sur  $[0, 1]$ , nous avons

$$\int_0^1 \{ \lambda_n^2 \rho(x) |\Phi_n(x)|^2 + (EI(x)\Phi_n''(x))''(x) \bar{\Phi}_n(x) \} dx = 0,$$

nous intégrons l'équation çï-dessus par parties et si nous posons

$$Q_n = \mu_{21}|\Phi_n(1)|^2 + 2\mu_{11}\Phi_n(1)\overline{\Phi}'_n(1) + 2\mu_{22}\Phi'_n(1)\overline{\Phi}_n(1) + \mu_{12}|\Phi'_n(1)|^2, \quad (5.16)$$

alors nous obtenons

$$\lambda_n^2 \int_0^1 \rho(x)|\Phi_n(x)|^2 dx + \int_0^1 EI(x)|\Phi''_n(x)|^2 dx + \alpha |\Phi'_n(1)|^2 + \beta |\Phi_n(1)|^2 + \lambda_n Q_n = 0, \quad (5.17)$$

La condition au bord (2.9)<sub>3</sub> du système (2.9) implique que

$$- (EI\overline{\Phi}''_n/\overline{\lambda}_n + 2\mu_{11}\overline{\Phi}_n + \alpha\overline{\Phi}'_n/\overline{\lambda}_n)(1) = \mu_{12}\overline{\Phi}'_n(1), \quad (5.18)$$

$$- (EI\Phi''_n/\lambda_n + 2\mu_{11}\Phi_n + \alpha\Phi'_n/\lambda_n)(1) = \mu_{12}\Phi'_n(1). \quad (5.19)$$

En multipliant les équations çï-dessus membre à membre, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mu_{12}|\Phi'_n(1)|^2 = & \mu_{12}^{-1}(EI^2(1)|\Phi''_n(1)/\lambda_n|^2 + 4\mu_{11}(\mu_{11}|\Phi_n(1)|^2 \\ & + EI(1)\Re(\Phi_n(1)\overline{\Phi}''_n(1)/\overline{\lambda}_n) + \alpha\Re(\Phi_n(1)\overline{\Phi}'_n(1)/\overline{\lambda}_n)) \\ & + \alpha^2 |\Phi'_n(1)/\lambda_n|^2 + 2\alpha EI(1)\Re(\Phi'_n(1)\overline{\Phi}''_n(1)/\lambda_n\overline{\lambda}_n)), \end{aligned} \quad (5.20)$$

en multipliant (5.18) par  $2(\mu_{11}/\mu_{12})\Phi_n(1)$ , nous avons

$$2\mu_{11}(\Phi_n\overline{\Phi}'_n)(1) = 2(\mu_{11}/\mu_{12})(-EI\Phi_n\overline{\Phi}''_n/\overline{\lambda}_n - 2\mu_{11}|\Phi_n|^2 - \alpha\overline{\Phi}'_n\Phi_n/\overline{\lambda}_n)(1). \quad (5.21)$$

En multipliant (5.19) par  $2(\mu_{22}/\mu_{12})\overline{\Phi}_n(1)$ , nous obtenons

$$2\mu_{22}(\overline{\Phi}_n\Phi'_n)(1) = 2(\mu_{22}/\mu_{12})(-EI\overline{\Phi}_n\Phi''_n/\lambda_n - 2\mu_{11}|\Phi_n|^2 - \alpha\overline{\Phi}_n\Phi'_n/\lambda_n)(1) \quad (5.22)$$

en additionnant (5.20),(5.21) et (5.22) alors (5.16) devient

$$\begin{aligned} Q_n = & |\Phi_n(1)|^2(\mu_{21} - 4(\mu_{11}\mu_{22}/\mu_{12})) - 2(EI(1)/\mu_{12})(\mu_{22} - \mu_{11}) \\ & \overline{\Phi}_n(1)(\Phi''_n(1)/\lambda_n) + (EI^2(1)/\mu_{12})|\Phi''_n(1)/\lambda_n|^2 - 2\alpha(\mu_{22} - \mu_{11})/\mu_{12} \\ & (\overline{\Phi}_n(1)\Phi'_n(1)/\lambda_n) + (\alpha^2/\mu_{12})|\Phi'_n(1)/\lambda_n|^2 + 2(\alpha EI(1)/\mu_{12}) \\ & (\Re(\Phi'_n(1)\overline{\Phi}''_n(1)/\lambda_n\overline{\lambda}_n)). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Or un calcul simple montre que

$$\overline{\Phi}_n(1)\Phi''_n(1)/\lambda_n = 8 i e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 a(s) ds} \eta^2(1) \{2 - e^{-2(n-\frac{1}{4})\pi}\} + O(n^{-1}),$$

$$\lambda_n^{-1}\Phi'_n(1) = O(n^{-1}), \quad \overline{\Phi}_n(1)\Phi'_n(1)/\lambda_n = O(n^{-1})$$

$$\Phi'_n(1)\overline{\Phi}''_n(1)/\lambda_n\overline{\lambda}_n = O(n^{-1}),$$

puisque  $(\Im(Q_n)/\Im(\lambda_n)) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  alors (5.17) implique que

$$2 \Re(\lambda_n) \int_0^1 \rho(x) |\Phi_n(x)|^2 dx + \Re(Q_n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.24)$$

D'après (2.11) et (2.12), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (EI^2 |\lambda_n^{-1} \Phi_n''|^2)(1) = 16(\rho EI)(1) e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 a(s) ds},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Phi_n(1)|^2 = 16 e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 a(s) ds}.$$

En utilisant (5.23) nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Re(Q_n) = L \text{ existe, avec}$$

$$L = (16/\mu_{12}) e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 a(s) ds} \{\mu_{12}\mu_{21} - 4\mu_{11}\mu_{22} + \rho(1)EI(1)\}.$$

D'après le théorème de Lebesgue-Riemman, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \rho(x) |\Phi_n(x)|^2 dx = 8 \int_0^1 \rho(x) e^{-\frac{1}{2} \int_0^z a(s) ds} dx,$$

par conséquent, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Re(\lambda_n) = -(L/16)\mu_{12} \int_0^1 \rho(x) e^{-\frac{1}{2} \int_0^z a(s) ds} dx.$$

Pour achever la démonstration du Lemme 3.4 il suffit de prouver que  $L > 0$ . Pour cela, il est facile de voir que  $L$  peut s'écrire ainsi

$$L = 16\mu_{12}^{-1} e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 a(s) ds} \{\mu_{12}\mu_{21} - (\mu_{11} + \mu_{22})^2 + (\mu_{22} - \mu_{11})^2 + \rho(1)EI(1)\}.$$

L'hypothèse (1.2) implique que  $L > 0$ .

### 5.5. Différences finies

$$y'(x_i) \simeq \frac{-3y(x_i) + 4y(x_i + h) - y(x_i + 2h)}{2h} \quad (5.25)$$

$$y''(x_i) \simeq \frac{y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)}{h^2} \quad (5.26)$$

$$y^{(4)}(x_i) \simeq \frac{y(x_i - 2h) - 4y(x_i - h) + 6y(x_i) - 4y(x_i + h) + y(x_i + 2h)}{h^4} \quad (5.27)$$

Considérons le développement limité à l'ordre 4 de la fonction  $y$  au point 1. Nous obtenons

$$y(1-h) = y(1) - hy_x(1) + \frac{h^2}{2}y_{xx}(1) - \frac{h^3}{6}y_{xxx}(x) + \frac{h^4}{24}y_{xxxx}(\xi_1) \quad (5.28)$$

$$y(1-2h) = y(1) - 2hy_x(1) + 2h^2y_{xx}(1) - \frac{4h^3}{3}y_{xxx}(1) + \frac{2h^4}{3}y_{xxxx}(\xi_2) \quad (5.29)$$

$$y(1-3h) = y(1) - 3hy_x(1) + \frac{h^2}{2}y_{xx}(1) - \frac{9h^3}{2}y_{xxx}(1) + \frac{81h^4}{24}y_{xxxx}(\xi_3), \quad (5.30)$$

où  $\xi_j \in (1-h, 1)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Nous éliminons  $y_{xx}(1)$  (resp.  $y_x(1)$ ) dans (5.28) et (5.29), nous obtenons

$$y_x(1) = \frac{y(1-2h) - 4y(1-h) + 3y(1)}{2h} + O(h^2) \quad (5.31)$$

(resp

$$y_{xx}(1) = \frac{-2y(1-h) + y(1) + y(1-2h)}{h^2} + O(h^2). \quad (5.32)$$

Nous éliminons  $y_x(1)$  dans (5.28), (5.29) et (5.30) et nous remplaçons  $y_{xx}(1)$  par son approximation (5.32) nous obtenons

$$y_{xxx}(1) \simeq \frac{y(1) + 3y(1-2h) - y(1-3h) - 3y(1-h)}{3h^3} \quad (5.33)$$

**Remerciements.** Les auteurs remercient le rapporteur pour ses précieuses remarques et suggestions.

## Références

- [1] P. G. CIARLET – *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Ed. masson, 1982.
- [2] G. H. GOLUB et C. F. V. LOAN – *Matrix computations*, The Johns Hopkins university Press, 1989.
- [3] P. GRABOWSKI – « Well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems », *J. Mathematical system, Estimation and Control* **6** (1996), p. 121–124.
- [4] B. Z. GUO – « Riesz basis property and exponential stability of controlled euler-bernoulli beam equations with variable coefficients », *SIAM J. Control Optim.* **40 N 6** (2002), p. 1905–1923.

- [5] B. Z. GUO et R. YU – « On riesz basis property of discrete operators with application to an euler-bernoulli beam equation with boundary linear feedback », *control, IMA J. Math. Control Inform.* **18** (2001), p. 241–251.
- [6] J. L. LIONS et E. MAGENES – *Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, Paris, 1968.
- [7] C. B. MOLER et G. W. STEWART – « An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems », *SIAM J. Numer. Anal.* **10** (1973), p. 241–256, Collection of articles dedicated to the memory of George E. Forsythe.
- [8] M. A. NAIMARK – *Linear differential operators*, Ungar, New York, 1967.
- [9] B. RAO – « Uniform stabilization of a hybrid system of elasticity », *SIAM J. control and Optimization* **33** (1995), p. 440–445.
- [10] J. RAPPAZ et M. PICASSO – *Introduction à l'analyse numérique*, Press polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1998.
- [11] P. RIDEAU – *Contrôle d'un assemblage de poutres flexibles par des capteurs actionneurs ponctuels : étude du spectre du système*, Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Paris, Sophia-Antipolis, 1985.
- [12] A. SHKALIKOV – « Boundary problem for ordinary differential operators with parameter in the boundary condition », *J. Soviet mathematics* **33** (1986), p. 1311–1342.
- [13] N. YEBARI et A. ELKHATTAT – « Stabilisation uniforme d'une équation des poutres d'euler-bernoulli », *Annales Mathématiques Blaise Pascal* **10** (2003), p. 169–188.

MY DRISS AOURAGH  
Université Abdelmalek Essaadi  
Département de Mathématiques  
Faculté des sciences  
BP 2121 Tétouan  
Maroc  
d.aouragh@hotmail.com

NAJI YEBARI  
Université Abdelmalek Essaadi  
Département de Mathématiques  
Faculté des sciences  
BP 2121 Tétouan  
Maroc  
nyebari@hotmail.com