

ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

AMARISA CHANTANASIRI

Généralisation des critères pour l'indépendance linéaire de Nesterenko, Amoroso, Colmez, Fischler et Zudilin

Volume 19, n° 1 (2012), p. 75-105.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2012__19_1_75_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Généralisation des critères pour l'indépendance linéaire de Nesterenko, Amoroso, Colmez, Fischler et Zudilin

AMARISA CHANTANASIRI

Résumé

Deux méthodes différentes permettent de démontrer un critère pour l'indépendance linéaire dû à Yu.V. Nesterenko. Nous développons d'abord la méthode initiale de Nesterenko, simplifiée par F. Amoroso et P. Colmez, pour obtenir des critères plus précis que ceux établis jusqu'à maintenant, valables pour des familles finies de nombres complexes ou d'éléments de \mathbb{C}_p .

Nous reprenons ensuite l'approche différente de Fischler et Zudilin que nous avons utilisée dans un article précédent, qui permet de travailler avec une suite infinie de nombres réels ou de nombres p -adiques dans \mathbb{Q}_p .

Generalization of the criteria for linear independence of Nesterenko, Amoroso, Colmez, Fischler and Zudilin

Abstract

Two different methods yield a criterion for linear independence due to Yu.V. Nesterenko. In the first part of this paper we use the original method due to Nesterenko and simplified by Amoroso and Colmez, and we refine the previous results for finite sets of complex numbers or elements in \mathbb{C}_p .

Next we use the method due to Fischler and Zudilin, which we already used in a previous paper, which works with infinite families of real or p -adic numbers in \mathbb{Q}_p .

Mots-clés : Critères d'indépendance linéaire, géométrie des nombres, principe des tiroirs, approximation diophantienne.

Classification math. : 11J72.

1. La méthode de Nesterenko-Amoroso-Colmez

1.1. Introduction

En 1985, Nesterenko [5] a démontré un résultat auxiliaire appelé *critère pour l'indépendance linéaire* qui a été utilisé dans plusieurs articles, notamment pour démontrer des résultats diophantiens sur les valeurs spéciales de la fonction zêta de Riemann (voir par exemple [4]).

Sa démonstration a été simplifiée par Amoroso [1] et Colmez [3] (page 67). Une approche différente du sujet a été proposée en 2010 par Fischler et Zudilin [4]. Dans un article précédent [2], nous avons exploité la méthode de Fischler et Zudilin pour obtenir un énoncé plus précis que les critères antérieurs; de plus, au lieu de considérer une suite finie fixe de nombres réels, nous avons obtenu des critères pour l'indépendance linéaire faisant intervenir une suite infinie de nombres réels. Nous en avons déduit des critères pour la transcendance et pour l'indépendance algébrique. Comme nous allons le voir, cette approche de Fischler–Zudilin ne donne pas les résultats espérés quand on considère des suites de nombres complexes et dans le cas ultramétrique elle ne permet de traiter que des suites d'éléments d'extensions finies du corps \mathbb{Q}_p .

Dans un premier temps (§1.3, §1.4 et §1.5) nous montrons comment développer la méthode de Nesterenko, Amoroso et Colmez pour obtenir des critères concernant des suites finies de nombres complexes ou d'éléments de \mathbb{C}_p . Pour présenter la méthode de Nesterenko-Amoroso-Colmez nous considérons (§1.2) d'abord le cas de formes linéaires en deux variables, qui est un critère pour l'irrationalité. Ensuite, aux §2.1 et §2.2, nous reprenons l'approche de Fischler et Zudilin pour expliciter ce qu'elle donne pour des t -uplets de nombres réels, ensuite pour des nombres complexes, puis pour des nombres p -adiques dans \mathbb{Q}_p . Enfin, dans la section 3, nous étudions dans quelle mesure nos résultats sont optimaux.

Dans tout notre texte, nous appellerons *suites croissantes* les suites qui sont croissantes au sens large. Un nombre réel sera dit *positif* s'il est strictement positif. Rappelons d'abord le théorème principal de [2].

Théorème 1.1. *Soient $\underline{\xi} = (\xi_i)_{i \geq 0}$ une suite de nombres réels avec $\xi_0 = 1$, $(r_n)_{n \geq n_0}$ une suite croissante de nombres entiers positifs, $(Q_n)_{n \geq n_0}$, $(A_n)_{n \geq n_0}$ et $(B_n)_{n \geq n_0}$ des suites de nombres réels positifs telles que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/r_n} = \infty \quad \text{et, pour tout } n \geq n_0, \quad B_n Q_n \leq B_{n+1} Q_{n+1}.$$

On suppose que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire à coefficients entiers rationnels en $r_n + 1$ variables

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{n,0}X_0 + \ell_{n,1}X_1 + \cdots + \ell_{n,r_n}X_{r_n}$$

telle que

$$\sum_{i=0}^{r_n} |\ell_{n,i}| \leq Q_n, \quad 0 < |L_n(\underline{\xi})| \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|}{|L_n(\underline{\xi})|} \leq B_n.$$

Alors $A_n \leq 2(2B_nQ_n)^{r_n}$ pour tout n suffisamment grand.

Remerciements : Je tiens à exprimer mes vives reconnaissances à Michel Waldschmidt pour son grand soutien et sa disponibilité tout au long de ce travail. Je souhaite également à remercier Bernard de Mathan pour son aide et ses conseils. Enfin, je souhaite tout particulièrement à remercier le rapporteur pour son immense travail et ses précieuses suggestions.

1.2. Critères pour l'irrationalité

Pour présenter la stratégie de Nesterenko, nous commençons par nous restreindre à des formes linéaires en deux variables. La démonstration est particulièrement simple dans ce cas, mais elle contient les idées de base pour le cas général.

1.2.1. Critère d'irrationalité archimédien

On définit la hauteur $H(L)$ d'une forme linéaire

$$L(X_0, X_1, \dots, X_r) = \ell_0X_0 + \ell_1X_1 + \cdots + \ell_rX_r \in \mathbb{Z}X_0 + \mathbb{Z}X_1 + \cdots + \mathbb{Z}X_r$$

à coefficients dans \mathbb{Z} en $r + 1$ variables par

$$H(L) := \max\{|\ell_0|, |\ell_1|, \dots, |\ell_r|\}.$$

Quand $\underline{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_r)$ est un $(r + 1)$ -uplet de nombres complexes, on pose

$$|\underline{\xi}| := \max\{|\xi_0|, \dots, |\xi_m|\}.$$

Théorème 1.2. Soit $\underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{C}^2$. Soient

$$(A_n)_{n \geq n_0}, (B_n)_{n \geq n_0} \text{ et } (Q_n)_{n \geq n_0}$$

trois suites de nombres réels positifs. On suppose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty \quad \text{et} \quad B_nQ_n \leq B_{n+1}Q_{n+1} \quad \text{pour} \quad n \geq n_0.$$

A. CHANTANASIRI

On suppose de plus que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire $L_n(X_0, X_1) = \ell_{0,n}X_0 + \ell_{1,n}X_1$ à coefficients dans \mathbb{Z} , vérifiant $H(L_n) \leq Q_n$,

$$0 < |L_n(\underline{\xi})| \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{pour } n \geq n_0 \quad \text{et} \quad \frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|}{|L_n(\underline{\xi})|} \leq B_n \quad \text{pour } n > n_0.$$

Alors

$$|\underline{\xi}|A_n < 2B_nQ_n \quad \text{pour tout } n \text{ suffisamment grand.}$$

Sous les hypothèses du théorème 1.2, le cas particulier $r_n = 1$ pour tout n du théorème 1.1 donne la majoration $A_n \leq 4B_nQ_n$ quand $\xi_0 = 1$.

Démonstration. Soit n un entier suffisamment grand pour que

$$\frac{|L_{n_0}(\underline{\xi})|}{H(L_{n_0})} > \frac{|L_n(\underline{\xi})|}{H(L_n)}.$$

L'existence de n est garantie par le fait que A_n tend vers l'infini (noter que $H(L_n)$ est ≥ 1). Soit k le plus grand entier dans l'intervalle $[n_0, n]$ tel que

$$\frac{|L_k(\underline{\xi})|}{H(L_k)} > \frac{|L_n(\underline{\xi})|}{H(L_n)}.$$

On a $k < n$. Notons Δ le déterminant des deux formes linéaires L_n et L_k :

$$\Delta := \begin{vmatrix} \ell_{0,n} & \ell_{1,n} \\ \ell_{0,k} & \ell_{1,k} \end{vmatrix} = \ell_{0,n}\ell_{1,k} - \ell_{0,k}\ell_{1,n}.$$

On a

$$\xi_0\Delta = \begin{vmatrix} L_n(\underline{\xi}) & \ell_{1,n} \\ L_k(\underline{\xi}) & \ell_{1,k} \end{vmatrix} = L_n(\underline{\xi})\ell_{1,k} - L_k(\underline{\xi})\ell_{1,n}$$

et

$$\xi_1\Delta = \begin{vmatrix} \ell_{0,n} & L_n(\underline{\xi}) \\ \ell_{0,k} & L_k(\underline{\xi}) \end{vmatrix} = L_k(\underline{\xi})\ell_{0,n} - L_n(\underline{\xi})\ell_{0,k}.$$

Nous allons en déduire que Δ n'est pas nul. Étant donné la symétrie de la situation, on peut supposer sans perte de généralité $H(L_n) = |\ell_{1,n}|$. Dans le membre de droite de $\xi_0\Delta$, le deuxième terme a pour module $|L_k(\underline{\xi})|H(L_n)$, tandis que le premier a un module

$$|L_n(\underline{\xi})\ell_{1,k}| \leq |L_n(\underline{\xi})|H(L_k) < |L_k(\underline{\xi})|H(L_n).$$

Par conséquent $\Delta \neq 0$; de plus, pour $i = 0$ et $i = 1$, on a

$$|\xi_i\Delta| \leq |L_k(\underline{\xi})|H(L_n) + |L_n(\underline{\xi})|H(L_k) < 2|L_k(\underline{\xi})|H(L_n),$$

donc

$$|\underline{\xi}| |\Delta| < 2|L_k(\underline{\xi})|H(L_n).$$

Comme Δ est un entier rationnel non nul, on peut minorer $|\Delta|$ par 1. D'autre part le fait qu'on a choisi k maximal implique

$$\frac{|L_{k+1}(\underline{\xi})|}{H(L_{k+1})} \leq \frac{|L_n(\underline{\xi})|}{H(L_n)},$$

ce qui permet de majorer $H(L_n)$ par $|L_n(\underline{\xi})|H(L_{k+1})/|L_{k+1}(\underline{\xi})|$. Ainsi

$$|\underline{\xi}| \leq |\underline{\xi}| |\Delta| < 2H(L_{k+1})|L_n(\underline{\xi})| \frac{|L_k(\underline{\xi})|}{|L_{k+1}(\underline{\xi})|} \leq \frac{2}{A_n} B_{k+1} Q_{k+1}.$$

On utilise maintenant le fait que la suite $(B_n Q_n)_{n \geq n_0}$ est croissante (au sens large) et que $k+1 \leq n$, ce qui donne la conclusion. \square

Cette démonstration ne demande pas que ξ_0 et ξ_1 soient réels, mais les hypothèses entraînent que ξ_0 et ξ_1 sont non nuls et que ξ_1/ξ_0 est limite d'une suite de nombres rationnels, donc que ce quotient est réel. Les hypothèses impliquent aussi que ce quotient est irrationnel.

1.2.2. Critère d'irrationalité ultramétrique

Soit p un nombre premier. Quand $\underline{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_r)$ est un $(r+1)$ -uplet d'éléments de \mathbb{C}_p , on pose

$$|\underline{\xi}|_p := \max\{|\xi_0|_p, \dots, |\xi_r|_p\}.$$

Théorème 1.3. *Soit $\underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{C}_p^2$. Soient*

$$(A_n)_{n \geq n_0}, (B_n)_{n \geq n_0} \text{ et } (Q_n)_{n \geq n_0}$$

trois suites de nombres réels positifs. On suppose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n Q_{n-1} = \infty$$

et

$$B_n Q_{n-1} \leq B_{n+1} Q_n \text{ pour } n > n_0.$$

On suppose de plus que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire $L_n(X_0, X_1) = \ell_{0,n} X_0 + \ell_{1,n} X_1$ à coefficients dans \mathbb{Z} , vérifiant $H(L_n) \leq Q_n$,

$$0 < |L_n(\underline{\xi})|_p \leq \frac{1}{A_n} \text{ pour } n \geq n_0$$

A. CHANTANASIRI

et

$$\frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|_p}{|L_n(\underline{\xi})|_p} \leq B_n \quad \text{pour } n > n_0.$$

Alors

$$|\underline{\xi}|_p A_n \leq 2B_n Q_n Q_{n-1} \quad \text{pour tout } n \text{ suffisamment grand.}$$

Quand

$$L(X_0, X_1, \dots, X_r) = \ell_0 X_0 + \ell_1 X_1 + \dots + \ell_r X_r$$

est une forme linéaire à coefficients dans \mathbb{Z} en $r + 1$ variables, on pose

$$H_p(L) := \max\{|\ell_0|_p, |\ell_1|_p, \dots, |\ell_r|_p\}.$$

Démonstration. Soit n un entier suffisamment grand. Considérons d'abord le cas où

$$\frac{|L_{n_0}(\underline{\xi})|_p}{H_p(L_{n_0})} \leq \frac{|L_n(\underline{\xi})|_p}{H_p(L_n)}.$$

Comme

$$H_p(L_n) \geq \frac{1}{H(L_n)} \geq \frac{1}{Q_n},$$

on en déduit

$$A_n \leq Q_n \frac{H_p(L_{n_0})}{|L_{n_0}(\underline{\xi})|_p},$$

et l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n Q_{n-1} = \infty$ montre que la conclusion est vérifiée.

Si on n'est pas dans ce cas, alors l'ensemble des entiers k dans l'intervalle $[n_0, n]$ tels que

$$\frac{|L_k(\underline{\xi})|_p}{H_p(L_k)} > \frac{|L_n(\underline{\xi})|_p}{H_p(L_n)}$$

contient n_0 , donc n'est pas vide. On considère le plus grand de ces entiers. On a clairement $k < n$. Le déterminant $\Delta = \ell_{0,n}\ell_{1,k} - \ell_{0,k}\ell_{1,n}$ des deux formes linéaires L_n et L_k vérifie

$$\xi_0 \Delta = L_n(\underline{\xi})\ell_{1,k} - L_k(\underline{\xi})\ell_{1,n} \quad \text{et} \quad \xi_1 \Delta = L_k(\underline{\xi})\ell_{0,n} - L_n(\underline{\xi})\ell_{0,k}.$$

Le choix de k garantit $\Delta \neq 0$ et

$$|\underline{\xi}|_p |\Delta|_p = |L_k(\underline{\xi})|_p H_p(L_n).$$

Comme Δ est un entier rationnel non nul, on peut minorer $|\Delta|_p$ par

$$|\Delta|_p \geq \frac{1}{|\Delta|} \geq \frac{1}{2Q_n Q_k}.$$

Le fait qu'on a choisi k maximal implique

$$\frac{|L_{k+1}(\underline{\xi})|_p}{H_p(L_{k+1})} \leq \frac{|L_n(\underline{\xi})|_p}{H_p(L_n)}.$$

Comme $H_p(L_{k+1}) \leq 1$, on en déduit

$$H_p(L_n) \leq \frac{|L_n(\underline{\xi})|_p}{|L_{k+1}(\underline{\xi})|_p}.$$

Ainsi

$$\frac{|\underline{\xi}|_p}{2Q_n Q_k} \leq |\underline{\xi}|_p |\Delta|_p \leq |L_n(\underline{\xi})|_p \frac{|L_k(\underline{\xi})|_p}{|L_{k+1}(\underline{\xi})|_p} \leq \frac{B_{k+1}}{A_n}.$$

On utilise maintenant le fait que la suite $(B_{k+1}Q_k)_{k \geq n_0}$ est croissante (au sens large) avec la majoration $k+1 \leq n$ pour conclure. \square

Cette démonstration ne demande pas que ξ_0 et ξ_1 soient dans \mathbb{Q}_p , mais si, de plus, $\limsup A_n/Q_n = \infty$, alors ξ_0 n'est pas nul et ξ_1/ξ_0 est dans $\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$.

1.3. Élimination

La méthode de Nesterenko [5] repose sur des outils d'élimination linéaire, qui ont été ensuite précisés par Amoroso [1] et Colmez [3].

1.3.1. Hauteur $H(M)$ d'une matrice M à coefficients entiers

Nous reproduisons ici une partie de la section 6.1 de [3].

Soient s et r deux entiers vérifiant $0 \leq s \leq r$ et soit M une matrice de $\text{Mat}_{(s+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$ ayant $s+1$ lignes et $r+1$ colonnes, à coefficients entiers

$$M = (a_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq s \\ 0 \leq j \leq r}}.$$

Si J est une partie à $s+1$ éléments de $\{0, \dots, r\}$, on note M_J la matrice $(s+1) \times (s+1)$ de composantes $(a_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq s \\ j \in J}}$ et on pose

$$H(M) := \max_J |\det M_J|,$$

où J décrit les parties à $s+1$ éléments de $\{0, \dots, r\}$.

Soit $\underline{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_r) \in \mathbb{C}^{r+1}$. On note $M\underline{\xi}$ le vecteur colonne dans $\text{Mat}_{(s+1) \times 1}(\mathbb{C})$ dont la i -ème coordonnée est $\sum_{j=0}^r a_{i,j} \xi_j$ ($0 \leq i \leq s$).

Si J' est une partie à s éléments de $\{0, \dots, r\}$, on note $M_{J', \underline{\xi}}$ la matrice $(s+1) \times (s+1)$ obtenue en rajoutant à la matrice $(s+1) \times s$ de composantes $(a_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq s \\ j \in J'}}$ le vecteur $M\underline{\xi}$ et on pose

$$\Delta(M) := \max_{J'} |\det M_{J', \underline{\xi}}|_p,$$

où J' décrit les parties à s éléments de $\{0, \dots, r\}$.

Lemme 1.4.

(i) Si $s = 0$ et $M = (a_0, \dots, a_r) \in \text{Mat}_{1 \times (r+1)}(\mathbb{Z})$, alors

$$H(M) = \max_{0 \leq i \leq r} |a_i| \quad \text{et} \quad \Delta(M) = \left| \sum_{i=0}^r a_i \xi_i \right|.$$

(ii) Si $M \in \text{Mat}_{(r+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$, alors

$$H(M) = |\det(M)| \quad \text{et} \quad \Delta(M) = |\det(M)| |\underline{\xi}|.$$

(iii) Si $s \leq r$ et $M \in \text{Mat}_{(s+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$ et si $\Delta(M) \neq 0$, alors $H(M) \neq 0$.

(iv) Si $s \leq r-1$ et $M \in \text{Mat}_{(s+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$, si $L \in \text{Mat}_{1 \times (r+1)}(\mathbb{Z})$ et si $M \oplus L$ désigne l'élément de $\text{Mat}_{(s+2) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$ obtenu en accolant verticalement M et L , alors

$$H(M \oplus L) \leq (s+2)H(L)H(M)$$

et

$$\begin{aligned} H(M)\Delta(L) - (s+1)H(L)\Delta(M) &\leq \Delta(M \oplus L) \\ &\leq H(M)\Delta(L) + (s+1)H(L)\Delta(M). \end{aligned}$$

(v) Une matrice M de format $(s+1) \times (r+1)$ et de rang $< s+1$ vérifie $H(M) = 0$.

Seul l'énoncé (v) du lemme 1.4 ne figure pas dans [3]; il résulte immédiatement de la définition de $H(M)$.

1.3.2. Hauteur p -adique $H_p(M)$ d'une matrice M à coefficients entiers

Dans la section 1.5, nous aurons besoin d'une variante ultramétrique du lemme 1.4.

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

Nous conservons les notations de la section 1.3.1 avec $0 \leq s \leq r$ et $M \in \text{Mat}_{(s+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$. Soit p un nombre premier. Si J est une partie à $s + 1$ éléments de $\{0, \dots, r\}$, on pose

$$H_p(M) := \max_J |\det M_J|_p,$$

où J décrit les parties à $s + 1$ éléments de $\{0, \dots, r\}$.

D'autre part soit $\underline{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_r) \in \mathbb{C}_p^{r+1}$. On pose encore

$$\Delta_p(M) := \max_{J'} |\det M_{J', \underline{\xi}}|_p,$$

où J' décrit les parties à s éléments de $\{0, \dots, r\}$.

Lemme 1.5.

(i) Si $s = 0$ et $M = (a_0, \dots, a_r) \in \text{Mat}_{1 \times (r+1)}(\mathbb{Z})$, alors

$$H_p(M) = \max_{0 \leq i \leq r} |a_i|_p \quad \text{et} \quad \Delta_p(M) = \left| \sum_{i=0}^r a_i \xi_i \right|_p.$$

(ii) Si $M \in \text{Mat}_{(r+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$, alors

$$H_p(M) = |\det(M)|_p \quad \text{et} \quad \Delta_p(M) = |\det(M)|_p |\underline{\xi}|_p.$$

(iii) Si $s \leq r$ et $M \in \text{Mat}_{(s+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$ et si $\Delta_p(M) \neq 0$, alors $H(M) \neq 0$ et $H_p(M) \geq 1/H(M)$.

(iv) Si $s \leq r - 1$, $M \in \text{Mat}_{(s+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$ et $L \in \text{Mat}_{1 \times (r+1)}(\mathbb{Z})$, alors

$$H_p(M \oplus L) \leq H_p(L)H_p(M).$$

De plus, si $H_p(M)\Delta_p(L) > H_p(L)\Delta_p(M)$, alors

$$\Delta_p(M \oplus L) = H_p(M)\Delta_p(L).$$

Démonstration. L'inégalité $H(M)H_p(M) \geq 1$ dans (iii) résulte de la formule du produit, tandis que la fin de (iv) est une conséquence de l'inégalité ultramétrique. Le reste de la démonstration du lemme 1.5 est identique à celle du lemme 1.4. □

1.4. Critère complexe

Le théorème 1.2 est le cas particulier $r = 1$ du théorème suivant.

Théorème 1.6. *Soit $\underline{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_r)$ un $(r + 1)$ -uplet de nombres complexes, $(Q_n)_{n \geq n_0}$, $(A_n)_{n \geq n_0}$ et $(B_n)_{n \geq n_0}$ des suites de nombres réels positifs telles que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n Q_n = \infty$$

et, pour tout $n \geq n_0$,

$$B_n Q_n \leq B_{n+1} Q_{n+1}.$$

On suppose que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire $L_n(\underline{X}) \in \mathbb{Z}X_0 + \dots + \mathbb{Z}X_r$ telle que

$$H(L_n) \leq Q_n, \quad 0 < |L_n(\underline{\xi})| \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|}{|L_n(\underline{\xi})|} \leq B_n.$$

Alors

$$|\underline{\xi}| A_n \leq 2^r r! (B_n Q_n)^r \tag{1.1}$$

pour tout n suffisamment grand.

Démonstration. Pour chaque n suffisamment grand, nous allons construire une suite finie $M_n^{(s)}$ appartenant respectivement à $\text{Mat}_{(s+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z})$, jusqu'à au plus $s = r$, vérifiant

$$0 < \Delta(M_n^{(s)}) \leq 2^s s! \frac{(B_n Q_n)^s}{A_n}. \tag{1.2}$$

Pour $s = 0$ on peut prendre $M_n^{(0)} = L_n$, grâce aux hypothèses du théorème 1.6 et à la partie (i) du lemme 1.4. Pour s donné, $0 \leq s < r$, si on a

$$(s + 1) \Delta(M_n^{(s)}) H(L_{n_0}) \geq |L_{n_0}(\underline{\xi})| H(M_n^{(s)}), \tag{1.3}$$

on arrête la construction, et alors pour n suffisamment grand, la conclusion (1.1) du théorème 1.6 est triviale. En effet, en combinant (1.2) et (1.3) on obtient

$$A_n \leq 2^s (s + 1)! (B_n Q_n)^s \frac{H(L_{n_0})}{|L_{n_0}(\underline{\xi})|} \cdot \frac{1}{H(M_n^{(s)})}.$$

Comme $H(M_n^{(s)}) \geq 1$, la conclusion (1.1) résulte de la majoration $s \leq r - 1$ grâce à l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n Q_n) = \infty$.

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

Si maintenant l'inégalité (1.3) n'est pas vérifiée, alors l'ensemble des entiers k dans l'intervalle $[n_0, n]$ vérifiant

$$(s+1)\Delta(M_n^{(s)})H(L_k) < |L_k(\underline{\xi})|H(M_n^{(s)})$$

contient n_0 , donc n'est pas vide ; soit k le plus grand. On pose $M_n^{(s+1)} = M_n^{(s)} \oplus L_k$. On utilise la partie (iv) du lemme 1.4 :

$$\begin{aligned} H(M_n^{(s)})|L_k(\underline{\xi})| - (s+1)H(L_k)\Delta(M_n^{(s)}) &\leq \Delta(M_n^{(s+1)}) \\ &\leq H(M_n^{(s)})|L_k(\underline{\xi})| + (s+1)H(L_k)\Delta(M_n^{(s)}). \end{aligned}$$

Le membre de gauche est strictement positif, donc $\Delta(M_n^{(s+1)}) \neq 0$. Cela implique en particulier $k < n$, car il résulte de la construction que la ligne de numéro nul dans la matrice $M_n^{(s+1)}$ est L_n , donc si on avait $k = n$, la matrice $M_n^{(s+1)}$ aurait deux lignes identiques, et on aurait alors $\Delta(M_n^{(s+1)}) = 0$.

L'inégalité de droite donne

$$\Delta(M_n^{(s+1)}) \leq 2H(M_n^{(s)})|L_k(\underline{\xi})|,$$

et le choix de k implique

$$|L_{k+1}(\underline{\xi})|H(M_n^{(s)}) \leq (s+1)\Delta(M_n^{(s)})H(L_{k+1}),$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta(M_n^{(s+1)}) &\leq 2(s+1)\Delta(M_n^{(s)})H(L_{k+1})\frac{|L_k(\underline{\xi})|}{|L_{k+1}(\underline{\xi})|} \\ &\leq 2(s+1)\Delta(M_n^{(s)})B_{k+1}Q_{k+1}. \end{aligned}$$

Comme la suite $(B_n Q_n)_{n \geq n_0}$ est croissante (au sens large) et que $k+1 \leq n$, en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\Delta(M_n^{(s+1)}) \leq 2(s+1)\Delta(M_n^{(s)})B_n Q_n \leq 2^{s+1}(s+1)! \frac{(B_n Q_n)^{s+1}}{A_n}.$$

Lorsque l'on obtient (1.2) avec $s = r$, on a, d'après le lemme 1.4,

$$\Delta(M_n^{(r)}) = |\det M_n^{(r)}| |\underline{\xi}| \geq |\underline{\xi}|,$$

et la conclusion du théorème 1.6 en résulte. □

Cette démonstration fait intervenir, pour n suffisamment grand, $r + 1$ formes linéaires indépendantes L_k avec des indices k dans l'intervalle $[n_0, n]$; il est donc nécessaire que n soit suffisamment grand par rapport à r ; en particulier la méthode ne permet pas de traiter des suites (ξ_0, ξ_1, \dots) , alors que la méthode de Fischler–Zudilin [4, 2] le permet.

1.5. Critère p -adique

La méthode de Nesterenko permet aussi de démontrer un critère ultramétrique [6]; voici un analogue p -adique du théorème 1.6; le théorème (1.3) en est le cas particulier $r = 1$.

Théorème 1.7. *Soit $\underline{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_r)$ un $(r + 1)$ -uplet d'éléments de \mathbb{C}_p . Soient $(A_n)_{n \geq n_0}$, $(B_n)_{n \geq n_0}$, $(Q_n)_{n \geq n_0}$ des suites de nombres réels positifs. On suppose que la suite $(B_n Q_{n-1})_{n > n_0}$ est croissante et que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n Q_{n-1} = \infty.$$

On suppose de plus que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire $L_n(\underline{X}) \in \mathbb{Z}X_0 + \dots + \mathbb{Z}X_r$ telle que

$$H(L_n) \leq Q_n, \quad 0 < |L_n(\underline{\xi})|_p \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|_p}{|L_n(\underline{\xi})|_p} \leq B_n.$$

Alors

$$|\underline{\xi}|_p A_n < (r + 1)! (B_n Q_{n-1})^r Q_n \tag{1.4}$$

pour tout n suffisamment grand.

Démonstration. Soit n un entier suffisamment grand. Nous allons construire une suite finie d'entiers k_0, k_1, \dots, k_s avec

$$n = k_0 > k_1 > \dots > k_s \geq n_0,$$

jusqu'à au plus $s = r$, de telle sorte que la matrice

$$M_n^{(s)} \in \text{Mat}_{(s+1) \times (r+1)}(\mathbb{Z}),$$

dont la ligne d'indice i est formée des coefficients de L_{k_i} ($0 \leq i \leq s$), vérifie

$$0 < \Delta_p(M_n^{(s)}) \leq B_{k_{s+1}} \cdots B_{k_s+1} \frac{1}{A_n}. \tag{1.5}$$

Pour $s = 0$, les hypothèses du théorème 1.7 permettent de prendre $k_0 = n$, de sorte que $M_n^{(0)} = L_n$ avec $\Delta_p(M_n^{(0)}) = |L_n(\underline{\xi})|_p$.

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

Soit $0 \leq s \leq r - 1$; supposons k_0, k_1, \dots, k_s construits. En autorisant l'abus de notation qui confond une forme linéaire de $\mathbb{Z}X_0 + \dots + \mathbb{Z}X_r$ avec la matrice dans $\text{Mat}_{1 \times (r+1)}(\mathbb{Z})$ formée par le $(r + 1)$ -uplet de ses coefficients, on a

$$M_n^{(s)} = L_{k_0} \oplus \dots \oplus L_{k_s}.$$

Alors

$$H(M_n^{(s)}) \leq (s + 1)! Q_{k_0} \dots Q_{k_s}. \quad (1.6)$$

Supposons dans un premier temps

$$\Delta_p(M_n^{(s)}) H_p(L_{n_0}) \geq |L_{n_0}(\underline{\xi})|_p H_p(M_n^{(s)}). \quad (1.7)$$

Dans ce cas on arrête la construction. Des inégalités (1.5) et (1.7) on déduit

$$A_n \leq B_{k_1+1} \dots B_{k_s+1} \frac{H_p(L_{n_0})}{|L_{n_0}(\underline{\xi})|_p H_p(M_n^{(s)})}.$$

On utilise (1.6) pour majorer $1/H_p(M_n^{(s)})$:

$$\frac{1}{H_p(M_n^{(s)})} \leq H(M_n^{(s)}) \leq (s + 1)! Q_{k_0} Q_{k_1} \dots Q_{k_s},$$

et on en déduit

$$A_n \leq (s + 1)! B_{k_1+1} \dots B_{k_s+1} Q_{k_0} \dots Q_{k_s} \frac{H_p(L_{n_0})}{|L_{n_0}(\underline{\xi})|_p},$$

ce qui implique (1.4) car $s < r$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n Q_{n-1} = \infty$.

Supposons maintenant que l'inégalité (1.7) ne soit pas satisfaite. L'ensemble des entiers k dans l'intervalle $[n_0, k_s]$ vérifiant

$$\Delta_p(M_n^{(s)}) H_p(L_k) < |L_k(\underline{\xi})|_p H_p(M_n^{(s)})$$

contient n_0 , donc n'est pas vide; notons k_{s+1} le plus grand. On utilise la partie (iv) du lemme 1.5 : comme

$$H_p(M_n^{(s)}) |L_{k_{s+1}}(\underline{\xi})|_p > H_p(L_{k_{s+1}}) \Delta_p(M_n^{(s)})$$

on en déduit que la matrice $M_n^{(s+1)} = M_n^{(s)} \oplus L_{k_{s+1}}$ vérifie

$$\Delta_p(M_n^{(s+1)}) = H_p(M_n^{(s)}) |L_{k_{s+1}}(\underline{\xi})|_p.$$

En particulier $\Delta_p(M_n^{(s+1)}) \neq 0$, ce qui implique notamment $k_{s+1} < k_s$. Le choix de k_{s+1} fournit la majoration

$$|L_{k_{s+1}+1}(\underline{\xi})|_p H_p(M_n^{(s)}) \leq \Delta_p(M_n^{(s)}) H_p(L_{k_{s+1}+1}).$$

Donc

$$\Delta_p(M_n^{(s+1)}) \leq \Delta_p(M_n^{(s)}) H_p(L_{k_{s+1}+1}) \frac{|L_{k_{s+1}}(\underline{\xi})|_p}{|L_{k_{s+1}+1}(\underline{\xi})|_p} \leq \Delta_p(M_n^{(s)}) B_{k_{s+1}+1},$$

car $H_p(L_{k_{s+1}+1}) \leq 1$. Ceci termine la démonstration de (1.5) par récurrence.

On utilise alors (1.5) avec $s = r$:

$$\Delta_p(M_n^{(r)}) \leq B_{k_1+1} \cdots B_{k_r+1} \frac{1}{A_n}.$$

On minore enfin $\Delta_p(M_n^{(r)})$ en utilisant la partie (ii) du lemme 1.5 qui donne $\Delta_p(M_n^{(r)}) = |\det M_n^{(r)}|_p |\underline{\xi}|_p$; comme $\det M_n^{(r)}$ est un entier rationnel non nul, on a

$$|\det M_n^{(r)}|_p \geq \frac{1}{|\det M_n^{(r)}|}.$$

En utilisant la partie (ii) du lemme 1.4 puis (1.6), on en déduit

$$|\det M_n^{(r)}| = H(M_n^{(r)}) \leq (r+1)! Q_{k_0} \cdots Q_{k_r},$$

d'où

$$\begin{aligned} |\underline{\xi}|_p A_n &\leq (r+1)! Q_{k_0} B_{k_1+1} Q_{k_1} \cdots B_{k_r+1} Q_{k_r}, \\ &\leq (r+1)! Q_n (B_{k_1+1} Q_{k_1}) \cdots (B_{k_r+1} Q_{k_r}). \end{aligned}$$

Comme la suite $(B_{k+1} Q_k)_{k \geq n_0}$ est croissante, on en déduit

$$|\underline{\xi}|_p A_n \leq (r+1)! Q_n (B_n Q_{n-1}) \cdots (B_{n-r+1} Q_{n-r}),$$

ce qui est légèrement plus précis que la conclusion (1.4) du théorème 1.7. \square

Nous déduisons du théorème 1.7 le résultat suivant, dû à Nesterenko [6]. Quand $L \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ est une forme linéaire et p un nombre premier, on note $|L|_p$ le maximum des valeurs absolues p -adiques des coefficients de L .

Corollaire 1.1. *Soient $\delta, c_1, c_2, \tau_1, \tau_2$ des nombres réels positifs tels que $0 \leq \tau_1 - \tau_2 < \delta$. Soit $\sigma(t)$ une fonction croissante positive définie pour tout $t > t_0$ telle que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)} = 1.$$

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

Soit $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathbb{C}_p^m \setminus \{0\}$ et soit $(L_n(\underline{X}))_{n \geq n_0}$ une suite de formes linéaires dans $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ telle que

$$\log H(L_n) \leq \sigma(n) \quad \text{et} \quad c_1 e^{-\tau_1 \sigma(n)} \leq \frac{|L_n(\underline{\omega})|_p}{|L_n|_p} \leq c_2 e^{-\tau_2 \sigma(n)}$$

pour n suffisamment grand. Alors la dimension de l'espace sur \mathbb{Q} engendré par les nombres p -adiques $\omega_1, \dots, \omega_m$ est au moins $\tau_1 / (1 + \tau_1 - \tau_2)$.

Démonstration du corollaire 1.1. Il n'y a pas de restriction à supposer $\omega_1 = 1$. Soit $1, \xi_1, \dots, \xi_r$ une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les nombres $\omega_1, \dots, \omega_m$. Pour chaque n suffisamment grand, on définit une forme linéaire \tilde{L}_n à coefficients entiers en $r + 1$ variables par la condition

$$\tilde{L}_n(\underline{\xi}) = |L_n|_p L_n(\underline{\omega}).$$

Alors si on pose

$$Q_n = e^{\sigma(n)}, \quad A_n = c_2^{-1} e^{\tau_2 \sigma(n)} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{c_2}{c_1} e^{\tau_1 \sigma(n) - \tau_2 \sigma(n-1)},$$

on a

$$H(\tilde{L}_n) \leq Q_n, \quad |\tilde{L}_n(\underline{\xi})|_p \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{|\tilde{L}_{n-1}(\underline{\xi})|_p}{|\tilde{L}_n(\underline{\xi})|_p} \leq B_n.$$

La conclusion

$$|\underline{\xi}|_p A_n < (r + 1)! (B_n Q_{n-1})^r Q_n$$

du théorème 1.7 donne alors

$$|\underline{\xi}|_p c_2^{-1} e^{\tau_2 \sigma(n)} < (r + 1)! \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^r e^{r \tau_1 \sigma(n) - r \tau_2 \sigma(n-1)} e^{r \sigma(n-1) + \sigma(n)}.$$

L'hypothèse

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)} = 1$$

implique finalement

$$\tau_1 \leq (r + 1)(1 + \tau_1 - \tau_2).$$

□

Remarque 1. Le résultat démontré par Nesterenko dans [6] concerne plus généralement des formes linéaires à coefficients dans un corps de nombres K , et la conclusion donne un résultat d'indépendance linéaire sur K . Il est possible d'étendre tous les énoncés de notre présent travail à un corps de nombres.

2. La méthode de Fischler-Zudilin

Nous reprenons maintenant l'étude débutée dans [2] reposant sur la méthode de Fischler et Zudilin [4] qui nous a permis de démontrer le théorème 1.1. Nous étendons ce résultat à des suites de t -uplets de nombres réels, puis nous utilisons le cas $t = 2$ pour obtenir un énoncé concernant les suites de nombres complexes. Ensuite nous donnons des énoncés ultramétriques pour des suites d'éléments de \mathbb{Z}_p .

2.1. Critères archimédiens pour des suites

2.1.1. Formes linéaires simultanées

Soit t un nombre entier positif.

Théorème 2.1. *Soient $(\xi_{i\tau})_{i \geq 0, 1 \leq \tau \leq t}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^t avec $\xi_{01} = 1$ et $\xi_{0\tau} = 0$ pour tout $2 \leq \tau \leq t$, $(r_n)_{n \geq n_0}$ une suite croissante de nombres entiers positifs, $(Q_n)_{n \geq n_0}$, $(A_n)_{n \geq n_0}$ et $(B_n)_{n \geq n_0}$ des suites de nombres réels positifs telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/r_n} = \infty$ et, pour tout $n \geq n_0$,*

$$B_n Q_n \leq B_{n+1} Q_{n+1}.$$

On suppose que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire à coefficients entiers rationnels en $r_n + 1$ variables

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{0,n} X_0 + \ell_{1,n} X_1 + \cdots + \ell_{r_n,n} X_{r_n}$$

telle que la suite de nombres

$$\Lambda_n = \max_{1 \leq \tau \leq t} |L_n(\xi_{0\tau}, \dots, \xi_{r_n\tau})|$$

vérifie

$$\sum_{i=0}^{r_n} |\ell_{i,n}| \leq Q_n, \quad 0 < \Lambda_n \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n} \leq B_n.$$

Alors $A_n \leq 2(2B_n Q_n)^{tr_n}$ pour tout n suffisamment grand.

Démonstration. Pour $n \geq n_0$, soit C_n le convexe symétrique de \mathbb{R}^{tr_n+1} défini par

$$|x_0(n)| \leq \frac{1}{2\Lambda_n}, \quad |x_0(n)\xi_{i\tau} - x_{i\tau}(n)| \leq (2\Lambda_n)^{1/(tr_n)}$$

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

où $1 \leq i \leq r_n$, $1 \leq \tau \leq t$. Le volume de C_n est 2^{tr_n+1} . D'après le théorème de Minkowski (Théorème 2B du Chapitre II, [7]), il existe un élément non nul de $C_n \cap \mathbb{Z}^{tr_n+1}$. On fixe un tel élément

$$\underline{x}(n) = (x_0(n), x_{11}(n), \dots, x_{r_n 1}(n), \dots, x_{1t}(n), \dots, x_{r_n t}(n)) \in \mathbb{Z}^{tr_n+1} \setminus \{0\}.$$

Comme $A_n^{1/r_n} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, on a $x_0(n) \neq 0$ pour n suffisamment grand. En effet, si on avait $x_0(n) = 0$ avec $A_n > 2$, on aurait $|x_{i\tau}(n)| \leq (2/A_n)^{1/(tr_n)} < 1$ et par suite $x_{i\tau}(n) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq r_n$, $1 \leq \tau \leq t$, ce qui est contraire au choix de $\underline{x}(n) \in \mathbb{Z}^{tr_n+1} \setminus \{0\}$.

D'après les hypothèses et la majoration $(2\Lambda_n)^{1/(tr_n)} \leq (2/A_n)^{1/(tr_n)}$ pour $n \geq n_0$, la suite $(2\Lambda_n)^{1/(tr_n)}$ tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Comme $r_n \geq 1$, la suite Λ_n aussi tend vers zéro.

Montrons que la suite $|x_0(n)|$ tend vers l'infini. Sinon, elle admettrait une sous-suite bornée, donc une sous-suite constante et on aurait $x_0(n) = y$ avec $y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, pour tout n appartenant à une partie infinie A de \mathbb{N} . On aurait $\lim_{n \in A, n \rightarrow \infty} (y\xi_{i\tau} - x_{i\tau}(n)) = 0$, pour $1 \leq i \leq \sup r_n$ et $1 \leq \tau \leq t$, donc $x_{i\tau}(n) = y\xi_{i\tau}$ pour n suffisamment grand dans A . Ainsi $y\xi_{i\tau} \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq \sup r_n$ et $1 \leq \tau \leq t$, donc $yL_n(\xi_{0\tau}, \dots, \xi_{r_n \tau}) \in \mathbb{Z}$ pour n suffisamment grand dans A et $1 \leq \tau \leq t$, aussi $y\Lambda_n \in \mathbb{Z}$ pour n suffisamment grand dans A . Comme $\Lambda_n \neq 0$, on aurait donc $\Lambda_n \geq 1/|y|$ pour n suffisamment grand dans A , contrairement à l'hypothèse que Λ_n tende vers zéro. Par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_0(n)| = \infty$.

On fixe n suffisamment grand et on note $x_{i\tau}$ au lieu de $x_{i\tau}(n)$. Soit k le plus petit entier positif tel que

$$|x_0| \leq \frac{1}{2\Lambda_k}.$$

Comme $|x_0|$ tend vers l'infini avec n , k tend aussi vers l'infini avec n . De plus, on a $k \leq n$ et

$$|x_0| > \frac{1}{2\Lambda_{k-1}}.$$

Soit τ un entier vérifiant $1 \leq \tau \leq t$. Posons $x_{0\tau} = 0$. On écrit

$$\sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} x_{i\tau} = x_0 \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} \xi_{i\tau} + \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} (x_{i\tau} - x_0 \xi_{i\tau}). \quad (2.1)$$

Le membre de gauche de (2.1) est un entier rationnel. La valeur absolue de la première somme dans le membre de droite de (2.1) est égale à

A. CHANTANASIRI

$|x_0| \cdot |L_k(\xi_{0\tau}, \dots, \xi_{r_k\tau})|$ donc elle est majorée par $|x_0| \cdot \Lambda_k \leq 1/2$. On utilise alors la remarque suivante (comparer avec [4]) :

si un entier rationnel s'écrit comme une somme $x + y$ de deux nombres réels avec $|x| \leq 1/2$, alors $|y| \geq |x|$.

Par conséquent

$$\left| \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k}(x_{i\tau} - x_0 \xi_{i\tau}) \right| \geq \left| x_0 \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} \xi_{i\tau} \right|. \quad (2.2)$$

Le membre de gauche de (2.2) est majoré par

$$\sum_{i=0}^{r_k} |\ell_{i,k}| \max_{1 \leq i \leq r_n} |x_{i\tau} - x_0 \xi_{i\tau}| \leq Q_k (2\Lambda_n)^{1/(tr_n)} \leq Q_k \left(\frac{2}{A_n} \right)^{1/(tr_n)},$$

tandis que le membre de droite de (2.2) est minoré par

$$|x_0| \cdot |L_k(\xi_{0\tau}, \dots, \xi_{r_k\tau})| \geq \frac{|L_k(\xi_{0\tau}, \dots, \xi_{r_k\tau})|}{2\Lambda_{k-1}}.$$

Alors

$$\frac{1}{2B_k} \leq \frac{\Lambda_k}{2\Lambda_{k-1}} \leq Q_k \left(\frac{2}{A_n} \right)^{1/(tr_n)}.$$

Donc

$$A_n \leq 2(2B_k Q_k)^{tr_n}.$$

Comme $B_k Q_k \leq B_n Q_n$, on conclut $A_n \leq 2(2B_n Q_n)^{tr_n}$. □

Le lemme suivant est un énoncé bien connu dont une démonstration est donnée page 132 de [9]. Voir aussi [8](lemme 1.3.2). Des résultats de ce type peuvent remplacer le théorème de Minkowski. Ils seront utiles notamment dans le cas p -adique.

Lemme 2.2 (Lemme de Thue–Siegel). *Soient r un nombre entier ≥ 0 , t et U des nombres entiers positifs. Soient*

$$L_j(X_0, \dots, X_r) = \sum_{i=0}^r \xi_{i,j} X_i, \quad j = 1, \dots, t$$

des formes linéaires en $r + 1$ variables à coefficients réels telles que

$$\max_{1 \leq j \leq t} \sum_{i=0}^r |\xi_{i,j}| \leq U.$$

Soient V, ℓ des nombres entiers positifs tels que $\ell^t < (V + 1)^{r+1}$. Alors il existe des entiers x_0, \dots, x_r non tous nuls tels que

$$\max_{0 \leq i \leq r} |x_i| \leq V \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq j \leq t} |L_j(x_0, \dots, x_r)| \leq \frac{UV}{\ell}.$$

2.1.2. Critère complexe

Théorème 2.3. Soient $\underline{\xi} = (\xi_j)_{j \geq 0}$ une suite de nombres complexes avec $\xi_0 = 1$, $(r_n)_{n \geq n_0}$ une suite croissante de nombres entiers positifs,

$$(Q_n)_{n \geq n_0}, (A_n)_{n \geq n_0} \text{ et } (B_n)_{n \geq n_0}$$

des suites de nombres réels positifs telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/r_n} = \infty \text{ et, pour tout } n \geq n_0, B_n Q_n \leq B_{n+1} \cdot Q_{n+1}.$$

On suppose que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire à coefficients entiers rationnels en $r_n + 1$ variables

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{0,n} X_0 + \ell_{1,n} X_1 + \dots + \ell_{r_n,n} X_{r_n}$$

telle que

$$\sum_{i=0}^{r_n} |\ell_{i,n}| \leq Q_n, \quad 0 < |L_n(\underline{\xi})| \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|}{|L_n(\underline{\xi})|} \leq B_n.$$

Alors $A_n \leq 2(2^{3/2} 3^{1/4} \pi^{-1/2} B_n Q_n)^{2r_n}$ pour tout n suffisamment grand.

Si on applique le théorème 2.1 avec $t = 2$ en séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient l'inégalité un peu plus faible

$$A_n \leq 2(2\sqrt{2} B_n Q_n)^{2r_n}.$$

Pour obtenir le théorème 2.3, nous allons utiliser l'approximation de nombres complexes par des éléments de $\mathbb{Q} + j\mathbb{Q}$ (où $j = (-1 + i\sqrt{3})/2$).

Démonstration. Pour $n \geq n_0$, soit C_n le convexe symétrique de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{r_n}$, identifié à \mathbb{R}^{2r_n+1} , formé des $(z_0, z_1, \dots, z_{r_n})$ avec $z_0 \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbb{C}$ pour $1 \leq i \leq r_n$ satisfaisant

$$|z_0(n)| \leq \frac{1}{2|L_n(\underline{\xi})|},$$

$$|z_0(n)\xi_i - z_i(n)| \leq 2^{1/2} 3^{1/4} \pi^{-1/2} \cdot (2|L_n(\underline{\xi})|)^{1/(2r_n)}, \quad (1 \leq i \leq r_n).$$

A. CHANTANASIRI

Rappelons que $j = (-1 + i\sqrt{3})/2$. Le sous-ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[j] \times \cdots \times \mathbb{Z}[j]$ est un réseau de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{r_n}$ de volume fondamental $(\sqrt{3}/2)^{r_n}$, le volume du convexe est $2 \cdot (2\sqrt{3})^{r_n}$, il contient donc un point non nul $z(n) = (z_0(n), z_1(n), \dots, z_{r_n}(n))$ avec $z_0(n) \in \mathbb{Z}$ et $z_i(n) \in \mathbb{Z}[j]$ ($1 \leq i \leq r_n$).

Comme $A_n^{1/r_n} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, on a $z_0(n) \neq 0$ pour n suffisamment grand. En effet, si on avait $z_0(n) = 0$ avec $A_n^{1/r_n} \geq 3$, on aurait $|z_i(n)| \leq (2/A_n)^{1/(2r_n)} < 1$ et par suite $z_i(n) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq r_n$, ce qui est contraire au choix de $(z_0(n), z_1(n), \dots, z_{r_n}(n))$.

D'après les hypothèses et l'estimation $(2|L_n(\underline{\xi})|)^{1/(2r_n)} \leq (2/A_n)^{1/(2r_n)}$ pour $n \geq n_0$, la suite $(2|L_n(\underline{\xi})|)^{1/(2r_n)}$ tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Comme $r_n \geq 1$, la suite $|L_n(\underline{\xi})|$ aussi tend vers zéro.

Si la suite $|z_0(n)|$ ne tendait pas vers l'infini, elle admettrait une sous-suite bornée, donc une sous-suite constante et on aurait $z_0(n) = y$ avec $y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, pour tout n appartenant à une partie infinie A de \mathbb{N} . On aurait $\lim_{n \in A, n \rightarrow \infty} (y\xi_i - z_i(n)) = 0$, pour $1 \leq i \leq \sup r_n$, donc $z_i(n) = y\xi_i$ pour n suffisamment grand dans A . Ainsi $y\xi_i \in \mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq \sup r_n$, donc $yL_n(\xi_0, \dots, \xi_{r_n}) \in \mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ pour n suffisamment grand dans A . Comme $|L_n(\underline{\xi})| \neq 0$, on aurait donc $|L_n(\underline{\xi})| \geq 1/|y|$ pour n suffisamment grand dans A , contrairement à l'hypothèse que $|L_n(\underline{\xi})|$ tende vers zéro. Par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_0(n)| = \infty$.

On fixe n suffisamment grand et on note z_i au lieu de $z_i(n)$. Soit k le plus petit entier positif tel que

$$|z_0| \leq \frac{1}{2|L_k(\underline{\xi})|}.$$

Comme $|z_0|$ tend vers l'infini avec n , k tend aussi vers l'infini avec n . De plus, on a $k \leq n$ et

$$|z_0| > \frac{1}{2|L_{k-1}(\underline{\xi})|}.$$

On écrit

$$\sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} z_i = z_0 \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} \xi_i + \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} (z_i - z_0 \xi_i), \quad (2.3)$$

Le membre de gauche de (2.3) appartient à $\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$. La valeur absolue de la première somme dans le membre de droite est égale à $|z_0| \cdot |L_k(\underline{\xi})|$ donc elle est majorée par $1/2$. On utilise alors la remarque suivante : *si x et y*

sont des nombres complexes tels que $x + y \in \mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ et $|x| \leq 1/2$, alors $|y| \geq |x|$. Par conséquent

$$\left| \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} (z_i - z_0 \xi_i) \right| \geq \left| z_0 \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} \xi_i \right|. \quad (2.4)$$

Le membre de gauche de (2.4) est majoré par

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r_k} |\ell_{i,k}| \max_{1 \leq i \leq r_n} |z_i - z_0 \xi_i| &\leq Q_k (2^{1/2} 3^{1/4} \pi^{-1/2}) (2|L_n(\underline{\xi})|)^{1/(2r_n)} \\ &\leq Q_k (2^{1/2} 3^{1/4} \pi^{-1/2}) \left(\frac{2}{A_n} \right)^{1/(2r_n)}, \end{aligned}$$

tandis que le membre de droite de (2.4) est minoré par

$$|z_0| \cdot |L_k(\underline{\xi})| \geq \frac{|L_k(\underline{\xi})|}{2|L_{k-1}(\underline{\xi})|}.$$

Alors

$$\frac{1}{2B_k} \leq \frac{|L_k(\underline{\xi})|}{2|L_{k-1}(\underline{\xi})|} \leq Q_k (2^{1/2} 3^{1/4} \pi^{-1/2}) \left(\frac{2}{A_n} \right)^{1/(2r_n)}.$$

Donc

$$A_n \leq 2(2^{3/2} 3^{1/4} \pi^{-1/2} B_k Q_k)^{2r_n}.$$

Comme $B_k Q_k \leq B_n Q_n$, on conclut $A_n \leq 2(2^{3/2} 3^{1/4} \pi^{-1/2} B_n Q_n)^{2r_n}$. \square

Remarque 2. Approximer par des éléments de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ donne un résultat moins bon, c'est-à-dire $A_n \leq 2(4\pi^{-1/2} B_n Q_n)^{2r_n}$. Le réseau $\mathbb{Z}[j]$ de \mathbb{C} donne le meilleur résultat car le réseau hexagonal $\mathbb{Z}[j]$ est le plus dense des réseaux.

2.2. Critères ultramétriques pour des suites

Soit p un nombre premier. Le théorème ci-dessous est un analogue ultramétrique du théorème 1.1.

Théorème 2.4. Soient $\underline{\xi} = (\xi_i)_{i \geq 0}$ une suite de nombres appartenant à \mathbb{Z}_p avec $\xi_0 = 1$, $(r_n)_{n \geq n_0}$ une suite croissante de nombres entiers positifs, et soient $(A_n)_{n \geq n_0}$, $(B_n)_{n \geq n_0}$, $(Q_n)_{n \geq n_0}$ des suites de nombres réels positifs. On suppose que la suite $(B_n Q_{n-1})_{n > n_0}$ est croissante et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/r_n} = \infty.$$

A. CHANTANASIRI

On suppose de plus que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire à coefficients entiers rationnels en $r_n + 1$ variables

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{0,n}X_0 + \ell_{1,n}X_1 + \cdots + \ell_{r_n,n}X_{r_n}$$

telle que

$$\sum_{i=0}^{r_n} |\ell_{i,n}| \leq Q_n, \quad 0 < |L_n(\underline{\xi})|_p \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|_p}{|L_n(\underline{\xi})|_p} \leq B_n.$$

Alors $A_n < (pB_nQ_{n-1})^{r_n+1}$ pour tout n suffisamment grand.

Avant de démontrer le théorème 2.4, nous donnons plusieurs versions du principe des tiroirs. Le théorème de Minkowski va être remplacé ici par le principe des tiroirs.

Lemme 2.5. Soient r un nombre entier ≥ 0 , s et t des nombres entiers positifs. Soient

$$L_j(X_0, \dots, X_r) = \sum_{i=0}^r \xi_{i,j} X_i, \quad j = 1, \dots, t$$

des formes linéaires en $r+1$ variables à coefficients dans \mathbb{Z}_p . Alors il existe des entiers x_0, \dots, x_r non tous nuls tels que

$$\max_{0 \leq i \leq r} |x_i| < p^{\frac{st}{r+1}+1} \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq j \leq t} |L_j(x_0, \dots, x_r)|_p \leq \frac{1}{p^s}.$$

Démonstration. Soit

$$A := \left\{ (x_0, \dots, x_r) \in \mathbb{Z}^{r+1} : 0 \leq x_i < p^{\frac{st}{r+1}+1} \text{ pour tout } 0 \leq i \leq r \right\}.$$

Alors le cardinal de A est supérieur ou égal à $\left[p^{\frac{st}{r+1}+1} \right]^{r+1}$. Comme \mathbb{Z}_p est recouvert par p^s boules de diamètre p^{-s} , il en résulte que \mathbb{Z}_p^t est recouvert par p^{st} produits de boules de \mathbb{Z}_p , de diamètre p^{-s} . Comme

$$p^{st} \leq \left(\frac{p^{\frac{st}{r+1}+1}}{2} \right)^{r+1} \leq \left(p^{\frac{st}{r+1}+1} - 1 \right)^{r+1} < \left[p^{\frac{st}{r+1}+1} \right]^{r+1},$$

et que $(L_1(\underline{x}), \dots, L_t(\underline{x}))$ appartient à \mathbb{Z}_p^t pour tout $\underline{x} \in A$, le principe des tiroirs montre qu'il existe deux éléments distincts $\underline{x}' = (x'_0, \dots, x'_r)$ et $\underline{x}'' = (x''_0, \dots, x''_r)$ de A tels que $|L_j(\underline{x}') - L_j(\underline{x}'')|_p \leq p^{-s}$ pour $1 \leq j \leq t$. On pose $(x_0, \dots, x_r) = (\underline{x}') - (\underline{x}'')$. \square

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

Le lemme 2.5 concerne des formes linéaires à coefficients dans \mathbb{Z}_p . Il suffit pour traiter des formes linéaires à coefficients dans \mathbb{Q}_p , en prenant un dénominateur commun.

Lemme 2.6. *Soient r, u des nombres entiers ≥ 0 , s et t des nombres entiers positifs. Soient*

$$L_j(X_0, \dots, X_r) = \sum_{i=0}^r \xi_{i,j} X_i, \quad j = 1, \dots, t$$

des formes linéaires en $r + 1$ variables à coefficients dans \mathbb{Q}_p telles que

$$|\xi_{i,j}|_p \leq p^u \quad (0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq t).$$

Alors il existe des entiers x_0, \dots, x_r non tous nuls tels que

$$\max_{0 \leq i \leq r} |x_i| < p^{\frac{st}{r+1}+1} \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq j \leq t} |L_j(x_0, \dots, x_r)|_p \leq p^{u-s}.$$

Démonstration. Soient $\xi'_{i,j} = p^u \xi_{i,j}$ ($0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq t$). En appliquant le lemme 2.5 aux éléments $\xi'_{i,j}$ de \mathbb{Z}_p , nous obtenons les entiers x_0, \dots, x_r désirés. \square

Le cas particulier du lemme 2.5 que nous utiliserons est $t = r$.

Corollaire 2.1. *Soient r, u des nombres entiers ≥ 0 et s un nombre entier positif. Soient*

$$L_j(X_0, \dots, X_r) = \sum_{i=0}^r \xi_{i,j} X_i, \quad j = 1, \dots, r$$

des formes linéaires en $r + 1$ variables à coefficients dans \mathbb{Q}_p telles que

$$|\xi_{i,j}|_p \leq p^u \quad (0 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r).$$

Alors il existe des entiers x_0, \dots, x_r non tous nuls tels que

$$\max_{0 \leq i \leq r} |x_i| < p^{\frac{sr}{r+1}+1} \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq j \leq r} |L_j(x_0, \dots, x_r)|_p \leq p^{u-s}.$$

Nous utiliserons la propriété fondamentale suivante de l'inégalité ultramétrique.

Lemme 2.7. *Soit p un nombre premier. Soient u et v des éléments de \mathbb{Q}_p . Si $|u|_p < |v|_p$, alors $|u + v|_p = |v|_p$.*

Démonstration du théorème 2.4. Quitte à remplacer n_0 par un entier suffisamment grand, on peut supposer que les assertions suivantes sont vraies. Pour $n \geq n_0$, soit $|L_n(\underline{\xi})|_p = p^{-s_n}$, où s_n est un entier. Comme $r_n \geq 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/r_n} = \infty$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$, ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(\underline{\xi})|_p = 0$. Pour $n \geq n_0$, on a $s_n \geq 1$. D'après le corollaire 2.1, pour $n \geq n_0$, il existe $\underline{X}(n) = (x_0(n), \dots, x_{r_n}(n)) \in \mathbb{Z}^{r_n+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\max_{0 \leq i \leq r_n} |x_i(n)| < p^{\frac{r_n s_n}{r_n+1} + 1} = p \cdot |L_n(\underline{\xi})|_p^{-\frac{r_n}{r_n+1}}, \quad (2.5)$$

$$\max_{1 \leq i \leq r_n} |x_i(n) - x_0(n)\xi_i|_p \leq p^{-s_n} = |L_n(\underline{\xi})|_p. \quad (2.6)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/r_n} = \infty$, on a $x_0(n) \neq 0$ pour n suffisamment grand. En effet, comme

$$|L_n(\underline{\xi})|_p^{1/(r_n+1)} \leq \left(\frac{1}{A_n} \right)^{1/(r_n+1)} \leq \frac{1}{p},$$

on a $|x_i(n)| < p \cdot |L_n(\underline{\xi})|_p^{-\frac{r_n}{r_n+1}} \leq |L_n(\underline{\xi})|_p^{-1}$ pour n suffisamment grand, et si on avait $x_0(n) = 0$, on aurait pour $1 \leq i \leq r_n$, $|x_i(n)|_p \leq |L_n(\underline{\xi})|_p$, donc $x_i(n) = 0$, ce qui est contraire au choix de $\underline{X}(n)$.

Soit $n_1 \geq n_0$ un entier suffisamment grand pour que $A_n^{1/(r_n+1)} \geq p^{s_{n_0}+1}$ pour $n \geq n_1$. Soit $n \geq n_1$. On va montrer qu'il existe un entier k dans l'intervalle $[n_0, n]$ tel que

$$|x_0(n)L_k(\underline{\xi})|_p > |L_n(\underline{\xi})|_p. \quad (2.7)$$

En effet, pour $n \geq n_1$, on a

$$|L_{n_0}(\underline{\xi})|_p = p^{-s_{n_0}} \geq p \cdot \left(\frac{1}{A_n} \right)^{1/(r_n+1)} \geq p \cdot |L_n(\underline{\xi})|_p^{1/(r_n+1)}.$$

D'après (2.5), on a aussi

$$|x_0(n)|_p \geq \frac{1}{|x_0(n)|} > p^{-1} \cdot |L_n(\underline{\xi})|_p^{r_n/(r_n+1)}.$$

Donc $|x_0(n)L_{n_0}(\underline{\xi})|_p > |L_n(\underline{\xi})|_p$. On en déduit l'existence d'un entier maximum $k \in [n_0, n]$ vérifiant (2.7) et de plus on a $k \leq n - 1$.

On fixe n suffisamment grand et on écrit \underline{x} au lieu de $\underline{x}(n)$. On écrit

$$L_k(\underline{x}) = x_0 L_k(\underline{\xi}) + L_k(\underline{x} - x_0 \underline{\xi}).$$

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

D'après (2.6) et grâce à l'inégalité ultramétrique, on a

$$|L_k(\underline{x} - x_0\underline{\xi})|_p \leq |L_n(\underline{\xi})|_p.$$

Alors $|L_k(\underline{x} - x_0\underline{\xi})|_p < |x_0 L_k(\underline{\xi})|_p$. D'après le lemme 2.7, on a

$$|L_k(\underline{x})|_p = |x_0 L_k(\underline{\xi})|_p,$$

donc $L_k(\underline{x}) \neq 0$ car x_0 et $L_k(\underline{\xi})$ sont non nuls. On a

$$|x_0 L_{k+1}(\underline{\xi})|_p \leq |L_n(\underline{\xi})|_p,$$

par conséquent

$$|L_k(\underline{x})|_p = |x_0 L_k(\underline{\xi})|_p \leq B_{k+1} |x_0 L_{k+1}(\underline{\xi})|_p \leq B_{k+1} |L_n(\underline{\xi})|_p.$$

Mais

$$|L_k(\underline{x})| = \left| \sum_{i=0}^{r_k} \ell_{i,k} x_i \right| \leq Q_k \max_{0 \leq i \leq r_k} |x_i| < p \cdot Q_k |L_n(\underline{\xi})|_p^{-\frac{r_n}{r_n+1}}.$$

Comme $L_k(\underline{x})$ est un entier non nul, on a $|L_k(\underline{x})| \geq |L_k(\underline{x})|_p^{-1}$, donc

$$p \cdot B_{k+1} Q_k |L_n(\underline{\xi})|_p^{1/(r_n+1)} > 1.$$

Ainsi $A_n < (p B_{k+1} Q_k)^{r_n+1}$. Comme $B_{k+1} Q_k \leq B_n Q_{n-1}$, on conclut

$$A_n < (p B_n Q_{n-1})^{r_n+1}.$$

□

La même démonstration permet d'étendre le théorème 2.4 à \mathbb{Z}_p^t avec $t \geq 1$.

Théorème 2.8. *Soient $(\xi_{i\tau})_{i \geq 0, 1 \leq \tau \leq t}$ une suite d'éléments de \mathbb{Z}_p^t avec $\xi_{01} = 1$ et $\xi_{0\tau} = 0$ pour tout $2 \leq \tau \leq t$, $(r_n)_{n \geq n_0}$ une suite croissante de nombres entiers positifs et $(A_n)_{n \geq n_0}$, $(B_n)_{n > n_0}$, $(Q_n)_{n \geq n_0}$ des suites de nombres réels positifs. On suppose la suite $(B_n Q_{n-1})_{n > n_0}$ croissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/r_n} = \infty$. On suppose de plus que, pour tout $n \geq n_0$, il existe une forme linéaire à coefficients entiers rationnels en $r_n + 1$ variables*

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{0,n} X_0 + \ell_{1,n} X_1 + \cdots + \ell_{r_n,n} X_{r_n}$$

telle que

$$\sum_{i=0}^{r_n} |\ell_{i,n}| \leq Q_n, \quad 0 < \Lambda_n \leq \frac{1}{A_n} \quad \text{et} \quad \frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n} \leq B_n.$$

où $\Lambda_n = \max_{1 \leq \tau \leq t} |L_n(\xi_{0\tau}, \dots, \xi_{r_n\tau})|_p$. Alors $A_n \leq (pB_n Q_{n-1})^{tr_n+1}$ pour tout n suffisamment grand.

3. Optimalité des résultats

Nous allons préciser dans quelle mesure nos résultats sont optimaux. Nous introduisons une condition notée (C_κ) qui est une mesure d'indépendance linéaire.

3.0.1. Cas réel

Définition 3.1. Soient κ un nombre réel positif, r un nombre entier positif et ξ_0, \dots, ξ_r des nombres réels. Nous dirons que le $(r+1)$ -uplet (ξ_0, \dots, ξ_r) vérifie la condition (C_κ) s'il existe un nombre réel positif c_0 tel que, pour tout $\underline{\ell} = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ vérifiant $\ell_0\xi_0 + \ell_1\xi_1 + \dots + \ell_r\xi_r \neq 0$, on ait

$$|\ell_0\xi_0 + \ell_1\xi_1 + \dots + \ell_r\xi_r| \geq c_0 H(\underline{\ell})^{-\kappa},$$

avec $H(\underline{\ell}) = \max_{0 \leq i \leq r} |\ell_i|$.

Lemme 3.2. Soient κ un nombre réel positif, r un nombre entier positif et $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r)$ un $(r+1)$ -uplet de nombres réels vérifiant la condition (C_κ) . On pose $d = \dim_{\mathbb{Q}} \langle \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r \rangle$. Alors $\kappa \geq d - 1$.

Démonstration. On renumérote, si nécessaire, les ξ_i pour que $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{d-1}$ soient linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Posons $U = |\xi_0| + |\xi_1| + \dots + |\xi_{d-1}|$. Soit H un nombre entier positif. D'après le lemme 2.2 avec $V = H$ et $\ell = V^d$, il existe des nombres entiers non tous nuls $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{d-1}$ tels que

$$H(\underline{\ell}) \leq H \quad \text{et} \quad |\ell_0\xi_0 + \ell_1\xi_1 + \dots + \ell_{d-1}\xi_{d-1}| \leq UH^{-d+1}.$$

En prenant $\ell_d = \dots = \ell_r = 0$, la condition (C_κ) entraîne

$$c_0 H^{-\kappa} \leq c_0 H(\underline{\ell})^{-\kappa} \leq UH^{-d+1}.$$

Donc $H^{d-1-\kappa} \leq U/c_0$. Comme H peut être choisi arbitrairement grand, cela implique $\kappa \geq d - 1$. \square

Ce résultat est optimal. En voici un exemple : on prend pour ξ_0, \dots, ξ_r une base d'un corps de nombres réel de degré $r+1$. L'inégalité de Liouville (Prop 3.14, [9] – inégalité de norme) montre que $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r)$ vérifie la condition (C_r) .

Proposition 3.3. *Soit r un nombre entier positif. Soient $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$ des nombres réels linéairement indépendants sur \mathbb{Q} vérifiant la condition (C_r) . Posons $U = |\xi_0| + \dots + |\xi_r|$. Soit B un nombre réel positif. Soient $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(Q_n)_{n \geq 1}$ des suites de nombres réels positif telles que*

$$Q_n > r + 1, \quad \frac{Q_{n-1}^r}{U(r+1)^r} \leq A_n \leq \frac{Q_n^r}{U(r+1)^r} \quad \text{et} \quad Q_n^r \leq \left(\frac{c_0 B}{U}\right) Q_{n-1}^r.$$

Alors, il existe une forme linéaire non nulle à coefficients entiers rationnels en $r + 1$ variables

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{0,n}X_0 + \ell_{1,n}X_1 + \dots + \ell_{r,n}X_n$$

telle que

$$\sum_{i=0}^r |\ell_{i,n}| \leq Q_n, \quad 0 < |L_n(\underline{\xi})| \leq \frac{1}{A_n}, \quad \frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|}{|L_n(\underline{\xi})|} \leq B$$

et $A_n \geq D(BQ_n)^r$, où $D = (c_0(r+1)^r B^{r+1})^{-1}$.

Démonstration. D'après le lemme 2.2 avec $V = \lfloor Q_n/(r+1) \rfloor$ et $\ell = (V+1)^{r+1} - 1$, il existe une forme linéaire non nulle à coefficients entiers rationnels en $r + 1$ variables

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{0,n}X_0 + \ell_{1,n}X_1 + \dots + \ell_{r,n}X_n$$

telle que

$$H(\underline{\ell}) \leq \frac{Q_n}{r+1}, \quad \text{et} \quad |L_n(\underline{\xi})| \leq \frac{U(r+1)^r}{Q_n^r} \leq \frac{1}{A_n}. \quad (3.1)$$

Alors $\sum_{i=0}^r |\ell_{i,n}| \leq Q_n$. Comme $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , la condition (C_r) entraîne

$$|L_n(\underline{\xi})| \geq \frac{c_0}{H(\underline{\ell})^r} \geq \frac{c_0(r+1)^r}{Q_n^r}. \quad (3.2)$$

D'après (3.1) et (3.2), on a

$$\frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|}{|L_n(\underline{\xi})|} \leq \frac{U(r+1)^r}{Q_{n-1}^r} \cdot \frac{Q_n^r}{c_0(r+1)^r} \leq B.$$

Enfin on a

$$A_n \geq D(BQ_n)^r \quad \text{avec} \quad D = (c_0(r+1)^r B^{r+1})^{-1}.$$

□

Remarque 3. Quand on choisit $B > U/c_0$, il existe des suites $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(Q_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 3.3 et tendant vers l'infini en croissant. Par exemple,

$$Q_n = (r+1) \left(\frac{c_0 B}{U} \right)^{n/r} \quad \text{et} \quad A_n = \frac{Q_n^r}{U(r+1)^r}.$$

3.0.2. Cas p -adique

Définition 3.4. Soient κ un nombre réel positif et r un nombre entier positif. Soient ξ_0, \dots, ξ_r des éléments de \mathbb{C}_p . Nous dirons que (ξ_0, \dots, ξ_r) vérifie la condition (C_κ) s'il existe un nombre réel positif c_0 tel que, pour tout $\underline{\ell} = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ vérifiant $\ell_0 \xi_0 + \ell_1 \xi_1 + \dots + \ell_r \xi_r \neq 0$, on ait

$$|\ell_0 \xi_0 + \ell_1 \xi_1 + \dots + \ell_r \xi_r|_p \geq c_0 H(\underline{\ell})^{-\kappa},$$

avec $H(\underline{\ell}) = \max_{0 \leq i \leq r} |\ell_i|$.

Lemme 3.5. Soient κ un nombre réel positif et r un nombre entier positif. Soient ξ_i ($0 \leq i \leq r$) des éléments de \mathbb{Q}_p satisfaisant à la condition (C_κ) . Soit $d = \dim_{\mathbb{Q}} \langle \xi_0, \dots, \xi_r \rangle$. Alors $\kappa \geq d$.

Démonstration. On renumérote, si besoin, pour que ξ_0, \dots, ξ_{d-1} soient linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . On définit $u > 0$ par $p^u = \max_{0 \leq i < d} |\xi_i|_p$. Soit s un nombre entier positif. D'après le lemme 2.6, il existe des nombres entiers $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{d-1}$ non tous nuls tels que $H(\underline{\ell}) < p^{(s/d)+1}$ et

$$|\ell_0 \xi_0 + \ell_1 \xi_1 + \dots + \ell_{d-1} \xi_{d-1}|_p \leq p^{u-s}.$$

En prenant $\ell_d = \dots = \ell_r = 0$, la condition (C_κ) entraîne

$$c_0 p^{-\kappa((s/d)+1)} < c_0 H(\underline{\ell})^{-\kappa} \leq p^{u-s}.$$

Donc $p^{s(1-(\kappa/d))} < p^{u+\kappa}/c_0$. Comme s peut être choisi arbitrairement grand, cela implique $\kappa/d \geq 1$. Par conséquent $\kappa \geq d$. \square

Un exemple de $r+1$ éléments de \mathbb{Q}_p linéairement indépendants sur \mathbb{Z} , et satisfaisant à la condition (C_{r+1}) est obtenu en prenant une base ξ_0, \dots, ξ_r d'un corps de nombres algébriques de degré $r+1$, contenu dans \mathbb{Q}_p comme le montre l'inégalité de Liouville (Exercice 3.5, [9]), ou une inégalité de norme.

Proposition 3.6. Soit r un nombre entier positif. Soient ξ_i ($0 \leq i \leq r$) des éléments de \mathbb{Q}_p linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , et satisfaisant à la condition (C_{r+1}) .

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

On définit u par $p^u = \max_{0 \leq i \leq r} |\xi_i|_p$. Soit B un nombre réel positif. Soient $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(Q_n)_{n \geq 1}$ des suites de nombres réels positif telles que

$$Q_n > r + 1, \quad \frac{Q_{n-1}^{r+1}}{p^{u+r+2}(r+1)^{r+1}} \leq A_n \leq \frac{Q_n^{r+1}}{p^{u+r+2}(r+1)^{r+1}}$$

et

$$Q_n^{r+1} \leq \left(\frac{c_0 B}{p^{u+r+2}} \right) Q_{n-1}^{r+1}.$$

Alors, il existe une forme linéaire non nulle à coefficients entiers rationnels en $r + 1$ variables

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{0,n}X_0 + \ell_{1,n}X_1 + \cdots + \ell_{r,n}X_r$$

telle que,

$$\sum_{i=0}^r |\ell_{i,n}| \leq Q_n, \quad 0 < |L_n(\underline{\xi})|_p \leq \frac{1}{A_n}, \quad \frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|}{|L_n(\underline{\xi})|} \leq B$$

et

$$A_n \geq D(BQ_n)^{r+1} \quad \text{avec} \quad D = (c_0(r+1)^{r+1}B^{r+2})^{-1}.$$

Démonstration. Soit s l'entier de \mathbb{Z} tel que

$$p^{\frac{s}{r+1}+1} \leq \frac{Q_n}{r+1} < p^{\frac{s+1}{r+1}+1}.$$

On peut supposer $s > 0$. D'après le lemme 2.6, il existe une forme linéaire non nulle à coefficients entiers rationnels en $r + 1$ variables

$$L_n(\underline{X}) = \ell_{0,n}X_0 + \ell_{1,n}X_1 + \cdots + \ell_{r,n}X_r$$

telle que $H(\underline{\ell}) < Q_n/(r+1)$ et

$$|L_n(\underline{\xi})|_p \leq \frac{p^u}{p^s} \leq \frac{p^{u+r+2}(r+1)^{r+1}}{Q_n^{r+1}} \leq \frac{1}{A_n}. \quad (3.3)$$

Alors $\sum_{i=0}^r |\ell_{i,n}| \leq Q_n$. Comme ξ_0, \dots, ξ_r sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , la condition (C_{r+1}) entraîne

$$|L_n(\underline{\xi})|_p \geq \frac{c_0}{H(\underline{\ell})^{r+1}} > \frac{c_0(r+1)^{r+1}}{Q_n^{r+1}}. \quad (3.4)$$

D'après (3.3) et (3.4), on a

$$\frac{|L_{n-1}(\underline{\xi})|_p}{|L_n(\underline{\xi})|_p} < \frac{p^{u+r+2}(r+1)^{r+1}}{Q_{n-1}^{r+1}} \cdot \frac{Q_n^{r+1}}{c_0(r+1)^{r+1}} \leq B.$$

Enfin on a

$$A_n \geq D(BQ_n)^{r+1} \quad \text{avec} \quad D = (c_0(r+1)^{r+1}B^{r+2})^{-1}.$$

□

Remarque 4. Soient ξ_0, \dots, ξ_r des nombres p -adiques linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . On suppose que (ξ_0, \dots, ξ_r) vérifie la condition (C_{r+1}) . Choisissons $B > p^{u+r+2}/c_0$. Alors on peut construire des suites $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(Q_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 3.6 et tendant vers l'infini en croissant. Par exemple,

$$Q_n = (r+1) \left(\frac{c_0 B}{p^{u+r+2}} \right)^{n/(r+1)} \quad \text{et} \quad A_n = \frac{Q_n^{r+1}}{p^{u+r+2}(r+1)^{r+1}}.$$

Références

- [1] F. AMOROSO – « Indipendenza lineare », Manuscrit.
- [2] A. CHANTANASIRI – « On the criteria for linear independence of Nesterenko, Fischler and Zudilin », *Chamchuri Journal of Mathematics* **2** (2010), no. 1, p. 31–46.
- [3] P. COLMEZ – « Arithmétique de la fonction zêta », in *La fonction zêta*, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2003, p. 37–164.
- [4] S. FISCHLER & W. ZUDILIN – « A refinement of Nesterenko's linear independence criterion with applications to zeta values », *Math. Ann.* **347** (2010), no. 4, p. 739–763.
- [5] Y. V. NESTERENKO – « Linear independence of numbers », *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* **1** (1985), p. 46–49, **108**.
- [6] ———, « On a criterion of linear independence of p -adic numbers », *Manuscripta mathematica*, 2011.
- [7] W. M. SCHMIDT – *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 785, Springer, Berlin, 1980.
- [8] M. WALDSCHMIDT – *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 402, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [9] ———, *Diophantine approximation on linear algebraic groups : Transcendence properties of the exponential function in several variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. **326**, Springer, Berlin, 2000.

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE LINÉAIRE

AMARISA CHANTANASIRI
Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Pierre et Marie Curie
(Paris VI) Théorie des Nombres
4 Place Jussieu
75252 PARIS Cedex 05
FRANCE
chantanasiri@gmail.com