ANNALES MATHÉMATIQUES

BLAISE PASCAL

Arwa Abbassi

Cup i-produit sur les algèbres graduées avec symétries et algèbres de Gerstenhaber

Volume 20, n^{o} 2 (2013), p. 331-361.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2013__20_2_331_0>

Publication éditée par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS Clermont-Ferrand — France

Annales mathématiques Blaise Pascal **20**, 331-361 (2013)

Cup i-produit sur les algèbres graduées avec symétries et algèbres de Gerstenhaber

Arwa Abbassi

Résumé

Dans ce papier, on définit, dans le cadre des algèbres graduées avec symétries la notion de cup i-produit introduite par Steenrod dans [11]. En utilisant le cup 1-produit, on montre que la cohomologie associée à une algèbre graduée avec symétries est une algèbre de Gerstenhaber.

Cup i-product on the graded algebras with symmetries and Gerstenhaber algebra

Abstract

In this paper, we define in the framework of graded algebras with symmetries the notion of cup i-product introduced by Steenrod in [11]. With the cup 1-product, we prove that the cohomology of a graded algebra with symmetries is a Gerstenhaber algebra.

1. Introduction

Dans ce travail, on définit la notion de *cup i-produits sur les algèbres graduées avec symétries* (AGS en abrégé). Rappelons que pour un anneau commutatif R, une AGS est la donnée d'un foncteur

$$T : \mathcal{F}in \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$$

La catégorie $\mathcal{F}$in étant celle dont les objets sont les ensembles $[n] = \{0, 1, \cdots, n\}$, $n \geq 0$ et les morphismes sont les applications quelconques. La catégorie $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ est celle des R-algèbres commutatives unitaires (cf. [1] pour plus de détails). Ces AGS sont une généralisation des formes différentielles étendues et des formes différentielles non commutatives introduites

Mots-clés : algèbre de Gerstenhaber, algèbres graduées avec symétries et cup i-produits.

Classification math. : 18G55.

par Connes (cf. [3]). En utilisant le cup 1-produit, on montre que la cohomologie associée à une AGS est une algèbre de Gerstenhaber. On rappelle que la notion d'algèbre de Gerstenhaber a été introduite par Murray Gerstenhaber (cf. [6]) en 1963. Précisèment, Gerstenhaber a montré que la cohomologie de Hochschild $HH^*(A)$ de toute algèbre associative A peut être munie d'un cup produit de degré 0 et d'un crochet de degré -1. Le cup produit est associatif et commutatif et le crochet munit $HH^*(A)$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée. De plus, le crochet est une dérivation pour le produit.
Ce travail est organisé de la façon suivante :

- Dans le premier paragraphe, on rappelle les notions d'algèbres différentielles non commutatives, d'algèbres graduées avec symétries et la notion de cup i-produits sur les algèbres différentielles non commutatives.
- Dans le deuxième paragraphe, on définit la notion de cup i-produits sur les AGS et on dégage quelques propriétés de ces cup i-produits.
- Dans le troisième et dernier paragraphe, on montre que la cohomologie associé à une AGS est une algèbre de Gerstenhaber.

2. Rappels

Commençons par rappeler quelques résultats concernant les formes différentielles non commutatives données dans [3] et [7] et la définition des cup i-produits sur ces mêmes formes ainsi que leurs propriétés donnés dans [1].

2.1. Formes différentielles non commutatives

Soient k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre unitaire. Les formes différentielles étendues de degré n sont les éléments du produit tensoriel de k-modules

$$T^n(A) = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$$

($n+1$ facteurs). Sur $T^*(A) = \oplus_{n\geq 0} T^n(A)$, on définit un opérateur de carré nul :

$$D : T^n(A) \longrightarrow T^{n+1}(A)$$

par la formule suivante :

$$D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - a_0 \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1,$$

et un produit

$$T^n(A) \otimes T^p(A) \longrightarrow T^{n+p}(A),$$

par la formule

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)(b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p.$$

Pour toutes formes $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$, la différentielle D vérifie l'identité de Leibniz :

$$D(w\theta) = D(w)\theta + (-1)^n w D(\theta).$$

On a en outre une action à droite du groupe symétrique S_{n+1} sur $T^n(A)$. En effet, en identifiant S_{n+1} à l'ensemble des permutations de $\{0, 1, \cdots n\}$, l'action est définie par la formule suivante :

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)^\sigma = a_{\sigma(0)} \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}.$$

Pour une k-algèbre A on pose $\Omega^0(A) = A$ et $\Omega^1(A)$ le noyau de l'application :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \longrightarrow & A \\ x \otimes y & \longmapsto & xy \end{array}$$

Le produit tensoriel étant celui de k-modules. En fait le k-module $\Omega^1(A)$ est aussi un A-bimodule et les formes différentielles non commutatives de degré n sont les éléments du produit tensoriel de A-modules :

$$\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \otimes \Omega^1(A) \otimes \cdots \otimes \Omega^1(A) (n \text{ facteurs de } \Omega^1(A)).$$

La somme $\Omega^*(A) = \oplus_{n \geq 0} \Omega^n(A)$ est une algèbre graduée de manière évidente, le produit de deux formes étant obtenu en juxtaposant les produits tensoriels. Considérons l'homomorphisme de k-modules

$$d : \Omega^0(A) \longrightarrow \Omega^1(A),$$

défini par la formule

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1.$$

On a alors l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A/k & \longrightarrow & \Omega^1(A) \\ x \otimes \overline{y} & \longmapsto & xdy \end{array}$$

(Le produit tensoriel étant celui de k-modules).
L'ensemble $\Omega^n(A)$ des formes différentielles non commutatives de degré n s'identifie alors au produit tensoriel de k-modules :

$$A \otimes A/k \otimes \cdots \otimes A/k (n \ \text{ facteurs de } \ A/k).$$

Une forme différentielle non commutative de degré n s'écrit donc comme combinaison linéaire de termes de la forme

$$a_0 da_1 \cdots da_n,$$

et le morphisme d s'étend aux formes de degré n de $\Omega^*(A)$ par la formule

$$d(a_0 da_1 \cdots da_n) = da_0 da_1 \cdots da_n.$$

Ce morphisme est de carré nul et vérifie, pour toutes formes $w \in \Omega^n(A)$ et $\theta \in \Omega^p(A)$, l'identité de Leibniz :

$$d(w\theta) = d(w)\theta + (-1)^n w d(\theta).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\Omega^n(A) \subset (A \otimes_k A) \otimes_A (A \otimes_k A) \otimes_A \cdots \otimes_A (A \otimes_k A) \\ \simeq A \otimes_k A \otimes_k \cdots \otimes_k A = T^n(A).\end{aligned}$$

L'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(A)$ est donc incluse dans $T^*(A)$.
Rappelons d'autre part, que si A est une k-algèbre commutative, une application

$$f : [n] \longrightarrow [p],$$

(où pour tout $m \in \mathbb{N}$, $[m]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, \cdots, m\}$) induit un morphisme

$$f_* : T^n(A) \longrightarrow T^p(A),$$

défini par la correspondance

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \longmapsto b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p,$$

où pour tout $j \in [p]$:

$$b_j = \begin{cases} \prod_{f(i)=j} a_i & \text{si } \ f^{-1}(j) \neq \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre alors que sur les formes étendues de degré n on a

$$D = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (\delta_i)_*,$$

où les $\delta_i : [n] \longrightarrow [n+1]$ sont les opérateurs de cofaces définis par $\delta_i(j) = j$ si $i > j$ et $\delta_i(j) = j + 1$ si $i \leq j$ et que

$$\Omega^n(A) = \bigcap_{i=0}^{n-1} ker(s_i)_*,$$

où les $s_i : [n] \longrightarrow [n-1]$ sont les opérateurs de codégénérescence définis par $s_i(j) = j$ si $i \geq j$ et $s_i(j) = j - 1$ si $i < j$.

2.2. cup i-produits sur les formes différentielles étendues

Soient k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre unitaire. Pour tous p, $q \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$, nous allons définir un cup i-produit :

$$T^p(A) \otimes T^q(A) \longrightarrow T^{p+q-i}(A).$$

Soient donc $p, q \in \mathbb{N}$, $w = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$ et $\theta = b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q \in T^q(A)$. Soit $i \leq min(p, q)$. Si i est pair, on pose

$$\begin{aligned} w \smile_i \theta = \sum \epsilon_\lambda a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j_0} b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k_0} a_{j_0+1} \otimes a_{j_0+2} \cdots \\ \otimes a_{j_1} b_{k_0+1} \otimes b_{k_0+2} \otimes \cdots \otimes b_{k_1} a_{j_1+1} \otimes a_{j_1+2} \otimes \cdots b_{k_{\frac{i}{2}-1}} a_{j_{\frac{i}{2}-1}+1} \\ \otimes a_{j_{\frac{i}{2}-1}+2} \otimes \cdots \otimes a_p b_{k_{\frac{i}{2}-1}+1} \otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}+2} \otimes \cdots \otimes b_q. \end{aligned}$$

Le signe ϵ_λ est la signature de la permutation λ de $\{0, 1, \cdots, p + q + 1\}$ qui envoie la forme

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q,$$

sur

$$\begin{aligned} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j_0} \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k_0} \otimes a_{j_0+1} \otimes a_{j_0+2} \otimes \cdots \otimes a_{j_1} \\ \otimes b_{k_0+1} \otimes b_{k_0+2} \otimes \cdots \otimes b_{k_1} \otimes a_{j_1+1} \otimes a_{j_1+2} \otimes \cdots \\ \otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}} \otimes a_{j_{\frac{i}{2}-1}+1} \otimes a_{j_{\frac{i}{2}-1}+2} \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}+1} \otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}+2} \otimes \cdots \otimes b_q. \end{aligned}$$

La somme est prise sur toutes les façons de choisir $\{j_0, ..., j_{\frac{i}{2}}\}$ et $\{k_0, ..., k_{\frac{i}{2}}\}$ tels que $j_0 \geq 0$, pour tout $s \leq \frac{i}{2} - 1$, $j_s + 1 < j_{s+1}$, $j_{\frac{i}{2}} = p$, $k_0 \geq 1$, pour tout $s \leq \frac{i}{2} - 2$, $k_s + 1 < k_{s+1}$ et $k_{\frac{i}{2}} = q$.

Pour i impair, on pose :

$$w \smile_i \theta = \sum \epsilon_\lambda a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j_0} b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k_0} a_{j_0+1} \otimes a_{j_0+2} \cdots \\ \otimes a_{j_1} b_{k_0+1} \otimes b_{k_0+2} \otimes \cdots \otimes b_{k_1} a_{j_1+1} a_{j_1+2} \otimes \cdots \otimes a_{j_{\frac{i-1}{2}}} b_{k_{\frac{i-3}{2}}+1} \\ \otimes b_{k_{\frac{i-1}{2}-1}+2} \otimes \cdots \otimes b_q a_{j_{\frac{i-1}{2}}+1} \otimes a_{j_{\frac{i-1}{2}}+2} \otimes \cdots \otimes a_p.$$

Dans ce cas $\{j_0, \cdots, j_{\frac{i-1}{2}}\}$ et $\{k_0, \cdots, k_{\frac{i-1}{2}}\}$ vérifiant $j_0 \geq 0$, pour tout $s \leq \frac{i-1}{2} - 1$, $j_s + 1 < j_{s+1}$, $j_{\frac{i-1}{2}} \leq p - 1$, $k_0 \geq 1$, pour tout $s \leq \frac{i-1}{2} - 1$, $k_s + 1 < k_{s+1}$ et $k_{\frac{i-1}{2}} = q$.
Pour $i < 0$, $i > min(p, q)$ on pose enfin :

$$w \smile_i \theta = 0.$$

Proposition 2.1. *(cf.* [1]*)*
Soient $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$ et $b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q \in T^q(A)$.
Pour $i = 0$, on a

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \smile_0 b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q.$$

Pour $i = 1$, on a la formule suivante :

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \smile_1 b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q = \\ \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{(p-i)(q+1)} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_p.$$

Proposition 2.2. *(cf.* [1]*)*
Soient $w = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$ et $\theta = b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q \in T^q(A)$ et $i \leq min(p, q)$. On a alors

$$D(w \smile_i \theta) = D(w) \smile_i \theta + (-1)^p w \smile_i D(\theta) + (-1)^{p+q-i} w \smile_{i-1} \theta \\ + (-1)^{pq+p+q} \theta \smile_{i-1} w.$$

Rappelons enfin que ces cup i-produits permettent de définir (cf. [1]) d'une manière explicite les carrés de Steenrod (cf. [12]) et les carrés de Thomas-Pontrjagin (cf. [13]).

3. Algèbres graduées avec symétries

On notera $\mathcal{F}$in la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n] = \{0, 1, ..., n\}$, $n \geq 0$ et les morphismes sont les applications quelconques. On notera $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ la catégorie des R-algèbres commutatives unitaires.

Définition 3.1. *Une algèbre graduée avec symétries* (AGS en abrégé) est la donnée d'un foncteur covariant

$$T : \mathcal{F}in \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{R}}$$

Exemple 3.2.

(1) Soit A une R-algèbre commutative unitaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T^n = A^{\otimes n+1}$. Pour toute application $f : [n] \longrightarrow [p]$, on associe le morphisme de R-algèbres $f_* : T^n \longrightarrow T^p$ défini précédemment. Ce foncteur T définit bien une AGS.

(2) Soit X un ensemble simplicial et A l'anneau simplicial défini par $A_n = App([n], R)$. Posons $T^n = Mor(X, A^{\otimes n+1})$. Ce foncteur définit une AGS dont l'algèbre différentielle graduée associée a la même cohomologie que celle de l'ensemble simplicial X.

(3) Soient R un Z-module de type fini et A le R-module libre de base les points de l'intervalle $B = [0, 1]$. le R-module $A^{\otimes n+1}$ est alors isomorphe à $L(B^{n+1})$ avec les notations de [4] . On peut le munir (cf. [5]) d'une topologie qui en fait un groupe abélien topologique. Pour un CW-complexe X, on pose $T^n = Mor(X, A^{\otimes n+1})$. Le foncteur T est une AGS dont l'algèbre différentielle graduée associée a la même cohomologie que celle de l'espace X (cf. [8]).

Un morphisme entre deux AGS, T et T', est défini par la donnée pour chaque $n \geq 0$, d'un morphisme de R-algèbres commutatives unitaires $f^n : T^n \longrightarrow T'^n$ de manière que

$$f^m T(\alpha) = T'(\alpha) f^n,$$

pour tout morphisme $\alpha : [n] \longrightarrow [m]$ de la catégorie $\mathcal{F}in$.

Soit A une R-algèbre commutative unitaire. Notons $\mathcal{D}_R$, la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n]$, $n \in \mathbb{N}$ et les morphismes $[n] \longrightarrow [p]$ sont les morphismes de R-modules $A^{\otimes n+1} \longrightarrow A^{\otimes p+1}$. Considérons la catégorie " linéairisée" $\mathcal{TF}in$ de $\mathcal{F}in$ qui a les mêmes objets que $\mathcal{F}in$ et $Hom_{\mathcal{TF}in}([n], [p])$ est le R-module libre de base $Hom_{\mathcal{F}in}([n], [p])$. L'exemple 3.2.1, permet alors de définir un foncteur

$$\theta : \mathcal{TF}in \longrightarrow \mathcal{D}_R.$$

Théorème 3.3. *(cf. [2])*
Pour $A = R[t]$, le foncteur $\theta : \mathcal{TF}in \longrightarrow \mathcal{D}_R$ est fidèle.

Soient n et $m \in \mathbb{N}$, $f_{n,m}$ l'inclusion de $[n]$ dans $[n+m]$ et $g_{n,m} : [m] \longrightarrow [n+m]$ l'application définie par $g_{n,m}(i) = i + n$. Pour toute AGS T, on a un morphisme

$$T^n \otimes T^m \longrightarrow T^{n+m} \otimes T^{n+m}.$$

Celui-ci, composé par la multiplication dans l'algèbre T^{n+m}, induit un produit

$$T^n \otimes T^m \longrightarrow T^{n+m}.$$

La somme directe $T^* = \bigoplus_{n\geq 0} T^n$ munie de ce produit est une algèbre graduée. Par ailleurs, soit

$$D : T^n \longrightarrow T^{n+1}.$$

le R-homomorphisme défini par

$$D = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i T(\delta_i),$$

où les δ_i sont les opérateurs cofaces définis précédemment. Alors D est de carré nul et vérifie pour toutes formes $w \in T^n$ et $\theta \in T^m$ l'identité de Leibniz :

$$D(w\theta) = D(w)\theta + (-1)^n w D(\theta).$$

Ainsi, T^* est munie d'une structure d'algèbre différentielle graduée.
Pour tout foncteur T définissant une AGS et pour tout $n \geq 0$, on pose :

$$\Omega^n = \bigcap_{i=0}^{n-1} ker(T(s_i)),$$

où les opérateurs $s_i : [n] \longrightarrow [n-1]$ sont définis précédemment. La somme $\Omega^* = \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^n$ est une sous-algèbre différentielle graduée de T^*.

4. La définition de cup i-produit dans le cadre des algèbres graduées avec symétries

Soit T une AGS. Pour tous p et q dans $\mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$, nous allons définir un cup i-produit :

$$T^p \otimes T^q \longrightarrow T^{p+q-i}.$$

Soit donc $i \leq min(p,q)$.
Si i est pair, on définit pour tous ensembles $\{j_0, ..., j_{\frac{i}{2}}\}$ et $\{k_0, ..., k_{\frac{i}{2}}\}$ vérifiant $j_0 \geq 0$, pour tout $s \leq \frac{i}{2} - 1$, $j_s + 1 < j_{s+1}$, $j_{\frac{i}{2}} = p$, $k_0 \geq 1$, pour tout $s \leq \frac{i}{2} - 2$, $k_s + 1 < k_{s+1}$ et $k_{\frac{i}{2}} = q$ une application $\alpha : [p] \longrightarrow [p+q-i]$ par

$$\alpha(j) = \begin{cases} j & \text{si } \ 0 \leq j \leq j_0 \\ j + k_{h-1} - 2h + 1 & \text{si } \ j_{h-1} + 1 \leq j \leq j_h \ \text{ et } \ 1 \leq h \leq \frac{i}{2} \end{cases}$$

et une application $\beta : [q] \longrightarrow [p+q-i]$ par

$$\beta(k) = \begin{cases} k + j_0 & \text{si } \ 0 \leq k \leq k_0 \\ k + j_h - 2h & \text{si } \ k_{h-1} + 1 \leq k \leq k_h \ \text{ et } \ 1 \leq h \leq \frac{i}{2} \end{cases}$$

Pour toute $AGS\ T$, on a alors un morphisme

$$T^p \otimes T^q \longrightarrow T^{p+q-i} \otimes T^{p+q-i},$$

celui-ci, composé par la multiplication dans T^{p+q-i}, induit un morphisme

$$T^p \otimes T^q \longrightarrow T^{p+q-i}.$$

On pose donc pour tous $w_1 \in T^p$ et $w_2 \in T^q$:

$$w_1 \smile_i w_2 = \sum \epsilon_\lambda T(\alpha)(w_1) T(\beta)(w_2).$$

La somme est prise sur toutes les façons de choisir $\{j_0, ..., j_{\frac{i}{2}}\}$ et $\{k_0, ..., k_{\frac{i}{2}}\}$ vérifiant les conditions citées plus haut. Le signe ϵ_λ désigne la signature de la permutation λ de $\{0, ..., p+q+1\}$ qui est définie par

$$\lambda(j) = \begin{cases} j & \text{si } \ 0 \leq j \leq j_0 \\ j + k_{h-1} + 1 & \text{si } \ j_{h-1} + 1 \leq j \leq j_h \ \text{ et } \ 1 \leq h \leq \frac{i-1}{2} \\ k + j_0 + 1 & \text{si } \ j = p + k + 1 \ \text{ et } \ 0 \leq k \leq k_0 \\ k + j_h + 1 & \text{si } \ j = p + k + 1 \ \text{ et } \ k_{h-1} + 1 \leq k \leq k_h \end{cases}$$

Pour i impair, définissons pour tous ensembles $\{j_0, \cdots, j_{\frac{i-1}{2}}\}$ et $\{k_0, \cdots, k_{\frac{i-1}{2}}\}$ vérifiant $j_0 \geq 0$, pour tout $s \leq \frac{i-1}{2} - 1$, $j_s + 1 < j_{s+1}$, $j_{\frac{i-1}{2}} \leq p - 1$, $k_0 \geq 1$, pour tout $s \leq \frac{i-1}{2} - 1$, $k_s + 1 < k_{s+1}$ et $k_{\frac{i-1}{2}} = q$ l'application $\alpha' : [p] \longrightarrow [p+q-i]$ par

$$\alpha'(j) = \begin{cases} j & \text{si } \ 0 \leq j \leq j_0 \\ j + k_{h-1} - 2h + 1 & \text{si } \ j_{h-1} + 1 \leq j \leq j_h \ \text{ et } \ 1 \leq h \leq \frac{i-1}{2} \\ q + j - i & \text{si } \ j_{\frac{i-1}{2}} + 1 \leq j \leq p \end{cases}$$

Notons β' l'application $[q] \longrightarrow [p+q-i]$ définie par

$$\beta'(k) = \begin{cases} k + j_0 & \text{si } \ 0 \leq k \leq k_0 \\ k + j_h - 2h & \text{si } \ k_{h-1}+1 \leq k \leq k_h \ \text{ et } \ 1 \leq h \leq \frac{i-1}{2} \end{cases}$$

On définit donc le cup-i-produit

$$T^p \otimes T^q \longrightarrow T^{p+q-i},$$

par la correspondance suivante :

$$w_1 \smile_i w_2 = \sum \epsilon_\lambda T(\alpha')(w_1) T(\beta')(w_2).$$

La somme est prise sur toutes les façons de choisir $\{j_0, \ldots, j_{\frac{i-1}{2}}\}$ et $\{k_0, \ldots, k_{\frac{i-1}{2}}\}$ vérifiant les conditions citées plus haut. Dans ce cas λ est définie par

$$\lambda(j) = \begin{cases} j & \text{si } \ 0 \leq j \leq j_0 \\ j + k_{h-1} + 1 & \text{si } \ j_{h-1}+1 \leq j \leq j_h \ \text{ et } \ 1 \leq h \leq \frac{i-1}{2} \\ j + q + 1 & \text{si } \ j_{\frac{i-1}{2}} + 1 \leq j \leq p \\ k + j_0 + 1 & \text{si } \ j = p + k + 1 \ \text{ et } \ 0 \leq k \leq k_0 \\ k + j_h + 1 & \text{si } \ j = p + k + 1 \ \text{ et } \ k_{h-1}+1 \leq k \leq k_h \end{cases}$$

Pour $i < 0$, $i > min(p,q)$ on pose enfin

$$w_1 \smile_i w_2 = 0.$$

Proposition 4.1. *Soient $w_1 \in T^p$, $w_2 \in T^q$.*

1: *Pour $i = 0$, on a*

$$w_1 \smile_0 w_2 = w_1 w_2.$$

2: *Si w_1 et $w_2 \in T^n$, on a*

$$w_1 \smile_n w_2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} w_1 \sharp w_2.$$

où $\sharp$ désigne la multiplication de T^n.

Démonstration.

1: Pour $i = 0$, on a $j_0 = p$ et $k_0 = q$ donc on a $\alpha(j) = j$, $\beta(k) = k+p$ et $\lambda(j) = j$, d'où la formule.

2: Supposons d'abord que n est impair, on a alors pour tout $s \leq \frac{n-1}{2} - 1$, $k_s + 1 < k_{s+1}$, $k_0 \geq 1$ et $k_{\frac{n-1}{2}} = n$ donc pour tout $s \leq \frac{n-1}{2}$, $k_s = 2s+1$. D'autre part, on a $j_0 \geq 0$, $j_{\frac{n-1}{2}} \leq n-1$

et $j_s+1<j_{s+1}$ pour tout $s\leq \frac{n-1}{2}-1$ donc $j_s=2s$ pour tout $s\leq\frac{n-1}{2}$. Donc α' et $\beta':[n]\longrightarrow[n]$ sont l'identité, et donc $w_1\smile_n w_2=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}w_1\sharp w_2$.

Pour n pair, la démonstration est la même. □

Proposition 4.2. *Soient T une* AGS*, $w_1\in\Omega^p$, $w_2\in\Omega^q$ et $i\leq min(p,q)$. On a alors :*

$$w_1\smile_i w_2\in\Omega^{p+q-i}.$$

Démonstration. Soit i impair. Pour tout $0\leq r\leq p+q-i-1$, on a

$$T(s_r)(w_1\smile_i w_2)=\sum\epsilon_\lambda T(s_r\alpha')(w_1)T(s_r\beta')(w_2).$$

Si $0\leq r<j_0(\,j_0\geq 1)$, on a $s_r\alpha'=\mu s_r$, où $\mu:[p-1]\longrightarrow[p+q-i-1]$ est définie par

$$\mu(j)=\begin{cases} j & \text{si } \ 0\leq j\leq j_0-1\\ j+k_h-2h-1 & \text{si } \ j_h\leq j\leq j_{h+1}-1 \ \text{ et } \ 0\leq h\leq\frac{i-1}{2}-1\\ q+j-i & \text{si } \ j_{\frac{i-1}{2}}\leq j\leq p-1\end{cases}$$

donc $T(s_r\alpha')(w_1)=0$.
Si $j_0\leq r<j_0+k_0$, on a $s_r\beta'=\tau s_{r-j_0}$, où $\tau:[q-1]\longrightarrow[p+q-i-1]$ est définie par

$$\tau(k)=\begin{cases} k+j_0 & \text{si } \ 0\leq k\leq k_0-1\\ k+j_{h+1}-2h-2 & \text{si } \ k_h\leq k\leq k_{h+1}-1 \ \text{ et } \ 0\leq h\leq\frac{i-1}{2}-1\end{cases}$$

donc $T(s_r\beta')(w_2)=0$. Il nous reste à montrer le résultat pour $j_0+k_0\leq r\leq p+q-i-1$. On considère pour cela deux cas. Si $j_s+k_s-2s\leq r<j_{s+1}+k_s-2s-1$ et $0\leq s\leq\frac{i-1}{2}$ (on pose $j_{\frac{i-1}{2}+1}=p$), alors on a $s_r\alpha'=\mu' s_{r-k_s+2s+1}$, où $\mu':[p-1]\longrightarrow[p+q-i-1]$ est définie par

$$\mu'(j)=\begin{cases} j & \text{si } \ 0\leq j\leq j_0\\ j+k_{h-1}-2h+1 & \text{si } \ j_{h-1}+1\leq j\leq j_h \ \text{ et } \ 1\leq h\leq s\\ j+k_s-2s-1 & \text{si } \ j_s+1\leq j\leq j_{s+1}-1\\ j+k_t-2t-1 & \text{si } \ j_t\leq j\leq j_{t+1}-1 \ \text{ et } \ s+1\leq t\leq\frac{i-1}{2}-1\\ q+j-i & \text{si } \ j_{\frac{i-1}{2}}\leq j\leq p-1\,.\end{cases}$$

Si $j_{s+1}+k_s-2s-1 \leq r < j_{s+1}+k_{s+1}-2s-2$ et $0 \leq s \leq \frac{i-1}{2}-1$, on a $s_r\beta' = \tau' s_{r-j_{s+1}+2s+2}$, où $\tau' : [q-1] \longrightarrow [p+q-i-1]$ est définie par

$$\tau'(k) = \begin{cases} k+j_0 & \text{si } 0 \leq k \leq k_0 \\ k+j_h-2h & \text{si } k_{h-1}+1 \leq k \leq k_h \ \text{ et } \ 1 \leq h \leq s \\ k+j_{s+1}-2s-2 & \text{si } k_s+1 \leq j \leq k_{s+1}-1 \\ k+j_{h+1}-2h-2 & \text{si } k_h \leq j < k_{h+1}-1 \text{ et } s+1 \leq h \leq \frac{i-1}{2}-1\,. \end{cases}$$

Pour i pair, la démonstration est analogue. □

Proposition 4.3. *Soient T une* AGS*, $w_1 \in T^p$, $w_2 \in T^q$ et $i \leq min(p,q)$. On a alors :*

$$D(w_1 \smile_i w_2) = D(w_1) \smile_i w_2 + (-1)^p w_1 \smile_i D(w_2) + (-1)^{p+q-i} w_1 \smile_{i-1} w_2 \\ + (-1)^{pq+p+q} w_2 \smile_{i-1} w_1.$$

Démonstration. Pour tous p et $q \in \mathbb{N}$, on notera $f_{p,q}$ l'inclusion de $[p]$ dans $[p+q+1]$ et $g_{p,q} : [q] \longrightarrow [p+q+1]$ l'application définie par $g_{p,q}(j) = j+p+1$. Soient i pair, $w_1 \in T^p$, $w_2 \in T^q$. On a alors :

$$w_1 \smile_i w_2 = \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p,q})(T(f_{p,q})(w_1)T(g_{p,q})(w_2)).$$

où $\nu_{i,p,q} : [p+q+1] \longrightarrow [p+q-i]$ est l'application qui est définie pour tous ensembles $\{j_0,...,j_{\frac{i}{2}}\}$ et $\{k_0,...,k_{\frac{i}{2}}\}$ vérifiant $j_0 \geq 0$, pour tout $s \leq \frac{i}{2}-1$, $j_s+1 < j_{s+1}$, $j_{\frac{i}{2}} = p$, $k_0 \geq 1$, pour tout $s \leq \frac{i}{2}-2$, $k_s+1 < k_{s+1}$ et $k_{\frac{i}{2}} = q$ par

$$\nu_{i,p,q}(j) = \begin{cases} j & \text{si} \quad 0 \leq j \leq j_0 \\ j+k_{h-1}-2h+1 & \text{si} \quad j_{h-1}+1 \leq j \leq j_h \ \text{ et } \ 1 \leq h \leq \frac{i}{2} \\ k+j_0 & \text{si} \quad j = p+k+1 \ \text{ et } \ 0 \leq k \leq k_0 \\ k+j_h-2h & \text{si} \quad j = p+k+1, \quad k_{h-1}+1 \leq k \leq k_h \\ & \qquad \text{et} \ \ 1 \leq h \leq \frac{i}{2}. \end{cases}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} D(w_1) \smile_i w_2 &= \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p+1,q})(T(f_{p+1,q})(D(w_1))T(g_{p+1,q})(w_2)) \\ &= \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p+1,q}) \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (T(f_{p+1,q} \circ \delta_j)(w_1)T(g_{p+1,q})(w_2)). \end{aligned}$$

Puisqu'on a pour tout $0 \leq j \leq p+1$:

$$f_{p+1,q} \circ \delta_j = \delta_j \circ f_{p,q} \ \text{ et } \ \delta_j \circ g_{p,q} = g_{p+1,q},$$

donc

$$D(w_1) \smile_i w_2 = \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p+1,q}) \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j T(\delta_j)(T(f_{p,q})(w_1) T(g_{p,q})(w_2)).$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned} w_1 \smile_i D(w_2) &= \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p,q+1})(T(f_{p,q+1})(w_1) T(g_{p,q+1})(D(w_2)) \\ &= \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p,q+1}) \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j T(f_{p,q+1})(w_1) T(g_{p,q+1} \circ \delta_j)(w_2)). \end{aligned}$$

Or pour tout $0 \leq j \leq q+1$:

$$f_{p,q+1} = \delta_{p+j+1} \circ f_{p,q} \quad \text{et} \quad \delta_{p+j+1} \circ g_{p,q} = g_{p,q+1} \circ \delta_j,$$

donc on a

$$\begin{aligned} & w_1 \smile_i D(w_2) \\ & \quad = \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p,q+1}) \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j T(\delta_{p+j+1})(T(f_{p,q})(w_1) T(g_{p,q})(w_2)). \end{aligned}$$

Ensuite on a

$$w_1 \smile_{i-1} w_2 = \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,p,q})(T(f_{p,q})(w_1) T(g_{p,q})(w_2)),$$

où $\nu_{i-1,p,q} : [p+q+1] \longrightarrow [p+q+1-i]$ est l'application définie, pour tous ensembles $\{j_0, \ldots, j_{\frac{i}{2}-1}\}$ et $\{k_0, \ldots, k_{\frac{i}{2}-1}\}$ vérifiant $j_0 \geq 0$, pour tout $s \leq \frac{i}{2} - 2$, $j_s + 1 < j_{s+1}$, $j_{\frac{i}{2}-1} \leq p-1$, $k_0 \geq 1$, pour tout $s \leq \frac{i}{2} - 2$, $k_s + 1 < k_{s+1}$ et $k_{\frac{i}{2}-1} = q$, par :

$$\nu_{i-1,p,q}(j) = \begin{cases} j & \text{si} \quad 0 \leq j \leq j_0 \\ j + k_{h-1} - 2h + 1 & \text{si} \quad j_{h-1} + 1 \leq j \leq j_h \text{ et } 1 \leq h \leq \frac{i}{2} - 1 \\ q + j - i + 1 & \text{si} \quad j_{\frac{i}{2}-1} + 1 \leq j \leq p \\ k + j_0 & \text{si} \quad j = p + k + 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq k \leq k_0 \\ k + j_h - 2h & \text{si} \quad j = p + k + 1, \quad k_{h-1} + 1 \leq k \leq k_h \\ & \qquad \text{et} \quad 1 \leq h \leq \frac{i}{2} - 1. \end{cases}$$

Enfin on a

$$w_2 \smile_{i-1} w_1 = \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,q,p})(T(f_{q,p})(w_2) T(g_{q,p})(w_1)),$$

et comme on a

$$f_{q,p} = h \circ g_{p,q} \quad \text{et} \quad g_{q,p} = h \circ f_{p,q}.$$

L'application $h : [p+q+1] \longrightarrow [p+q+1]$ étant définie par

$$h(j) = \begin{cases} j+q+1 & \text{si} \quad 0 \leq j \leq p; \\ j-p-1 & \text{si} \quad p+1 \leq j \leq p+q+1. \end{cases}$$

donc

$$w_2 \smile_{i-1} w_1 = \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,q,p} \circ h)(T(f_{p,q})(w_1)T(g_{p,q})(w_2)).$$

On aura donc

$$D(w_1 \smile_i w_2) = \sum_{r=0}^{p+q+1-i} \epsilon_\lambda (-1)^r T(\delta_r) \sum T(\nu_{i,p,q})(T(f_{p,q})(w_1)T(g_{p,q})(w_2)),$$

et

$$\begin{aligned} & D(w_1) \smile_i w_2 + (-1)^p w_1 \smile_i D(w_2) \\ & \quad + (-1)^{p+q-i} w_1 \smile_{i-1} w_2 + (-1)^{pq+p+q} w_2 \smile_{i-1} w_1 \\ & = \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p+1,q}) \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j T(\delta_j)(T(f_{p,q})(w_1)T(g_{p,q})(w_2)) \\ & + (-1)^p \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p,q+1}) \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j T(\delta_{p+j+1})(T(f_{p,q})(w_1)T(g_{p,q})(w_2)) \\ & \quad + (-1)^{p+q-i} \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,p,q})(T(f_{p,q})(w_1)T(g_{p,q})(w_2)) \\ & \quad + (-1)^{pq+p+q} \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,q,p} \circ h)(T(f_{p,q})(w_1)T(g_{p,q})(w_2)). \end{aligned}$$

Si T est l'algèbre des formes différentielles étendues, $w_1 = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes$

$a_p \in T^p(A)$ et $w_2 = b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q \in T^q(A)$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{p+q+1-i} \epsilon_\lambda (-1)^r T(\delta_r) \sum T(\nu_{i,p,q})(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q) \\
&\qquad = \big(\sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p+1,q}) \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j T(\delta_j) \\
&+ (-1)^p \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p,q+1}) \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j T(\delta_{p+j+1}) \ + (-1)^{p+q-i} \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,p,q}) \\
&+ (-1)^{pq+p+q} \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,q,p} \circ h)\big)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q),
\end{aligned}$$

donc d'après le théorème 3.5, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{p+q+1-i} \epsilon_\lambda (-1)^r \delta_r \sum \nu_{i,p,q} \\
&\quad = \sum \epsilon_\lambda \nu_{i,p+1,q} \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \delta_j + (-1)^p \sum \epsilon_\lambda \nu_{i,p,q+1} \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \delta_{p+j+1} \\
&\quad + (-1)^{p+q-i} \sum \epsilon_\lambda \nu_{i-1,p,q} + (-1)^{pq+p+q} \sum \epsilon_\lambda \nu_{i-1,q,p} \circ h \sum \epsilon_\lambda \nu_{i-1,p,q} \\
&\qquad\qquad + (-1)^{pq+p+q} \sum \epsilon_\lambda \nu_{i-1,q,p} \circ h,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{p+q+1-i} \epsilon_\lambda (-1)^r T(\delta_r) \sum T(\nu_{i,p,q}) \\
&\qquad = \Big(\sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p+1,q}) \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j T(\delta_j) \\
&\qquad + (-1)^p \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i,p,q+1}) \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j T(\delta_{p+j+1}) \\
&\quad + (-1)^{p+q-i} \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,p,q}) + (-1)^{pq+p+q} \sum \epsilon_\lambda T(\nu_{i-1,q,p} \circ h) \Big).
\end{aligned}$$

Pour i impair, la démonstration est la même. $\square$

Proposition 4.4. *Soit T une* AGS, *$w_1 \in T^n$, $w_2 \in T^p$ et $w_3 \in T^q$. On a alors la formule de Hirsch :*

$$w_1 w_2 \smile_1 w_3 = w_1(w_2 \smile_1 w_3) + (-1)^{p(q+1)}(w_1 \smile_1 w_3)w_2.$$

Démonstration. Pour tous $n,\ p \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \leq n-1$, on notera $f_{n,p}$ l'inclusion de $[n]$ dans $[n+p]$, $g_{n,p} : [p] \longrightarrow [n+p]$ l'application définie par $g_{n,p}(j) = j+n$, $\beta_{i,n,p} : [p] \longrightarrow [n+p-1]$ l'application définie par $\beta_{i,n,p}(j) = j+i$ et $\alpha_{i,n,p} : [n] \longrightarrow [n+p-1]$ l'application définie par :

$$\alpha_{i,n,p}(j) = \left\{ \begin{array}{lll} j & \text{si} & 0 \leq j \leq i\ ; \\ j+p-1 & \text{si} & i+1 \leq j \leq n. \end{array} \right.$$

Considérons $w_1 \in T^n$, $w_2 \in T^p$ et $w_3 \in T^q$, on a alors :

$$\begin{aligned} & w_1 w_2 \smile_1 w_3 = \\ & \quad \sum_{i=0}^{n+p-1} (-1)^{(n+p-i)(q+1)} T(\alpha_{i,n+p,q})(T(f_{n,p})(w_1)T(g_{n,p})(w_2))T(\beta_{i,n+p,q})(w_3) \\ & \quad + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n+p-i)(q+1)} T(\alpha_{i,n+p,q} f_{n,p})(w_1)T(\alpha_{i,n+p,q} g_{n,p})(w_2))T(\beta_{i,n+p,q})(w_3) \\ & + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{(p-i)(q+1)} T(\alpha_{i+n,n+p,q} f_{n,p})(w_1)T(\alpha_{i+n,n+p,q} g_{n,p})(w_2))T(\beta_{i+n,n+p,q})(w_3). \end{aligned}$$

Pour $i \leq n-1$, on a $\alpha_{i,n+p,q} f_{n,p} = f_{n+q-1,p}\alpha_{i,n,q}$, $\alpha_{i,n+p,q} g_{n,p} = g_{n+q-1,p}$ et $\beta_{i,n+p,q} = f_{n+q-1,p}\beta_{i,n,q}$.

Pour $i \leq p-1$, on a $\alpha_{i+n,n+p,q} f_{n,p} = f_{n,p+q-1}$, $\alpha_{i+n,n+p,q} g_{n,p} = g_{n,p+q-1}\alpha_{i,p,q}$ et $\beta_{i+n,n+p,q} = g_{n,p+q-1}\beta_{i,p,q}$.

On a donc :

$$w_1w_2 \smile_1 w_3 = (-1)^{p(q+1)} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n-i)(q+1)}$$
$$T(f_{n+q-1,p}\alpha_{i,n,q})(w_1)T(g_{n+q-1,p})(w_2)T(f_{n+q-1,p}\beta_{i,n,q})(w_3)$$
$$+ \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{(p-i)(q+1)}$$
$$T(f_{n,p+q-1})(w_1)T(g_{n,p+q-1}\alpha_{i,p,q})(w_2)T(g_{n,p+q-1}\beta_{i,p,q})(w_3)$$
$$= (-1)^{p(q+1)}(w_1 \smile_1 w_3)w_2 + w_1(w_2 \smile_1 w_3).$$

□

Remarques 4.5.

(1) On n'a pas en général de relation analogue entre $w_1 \smile_1 w_2w_3$, $w_1 \smile_1 w_2$ et $w_1 \smile_1 w_3$. Autrement dit, on n'a pas en général $w_1 \smile_1 w_2w_3 = (w_1 \smile_1 w_2)w_3 + w_2(w_1 \smile_1 w_3)$. Pour le voir il suffit de considérer les formes différentielles étendues $w_1 = a_0 \otimes a_1$, $w_2 = b_0 \otimes b_1 \otimes b_2$ et $w_3 = c_0 \otimes c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$. Cependant, on a le résultat suivant.

(2) Soient p un entier premier impair et T une AGS sur $\mathbb{Z}_p$. On a, grâce à la formule de Hirsch, une opération cohomologique (cf. [9] et [10]) :
$$<>^p \colon H^{2n+1}(T^*, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{2np+2}(T^*, \mathbb{Z}_p),$$
définie comme suit :
Soit a_1 un cocycle répresente $x \in H^{2n+1}(T^*, \mathbb{Z}_p)$. Pour tout $2 \leq i < p$, posons
$$a_i = \frac{1}{i} a_{i-1} \smile_1 a_1.$$
On a alors $D(a_i) = -\sum_{j=1}^{i-1} a_j a_{i-j}$ et $\widetilde{a} = -\sum_{j=1}^{p-1} a_j a_{p-j}$ est un cocycle. De même si a_1 est un cobord, il en est alors de même pour $\widetilde{a}$. On pose alors
$$< x >^p = \{\widetilde{a}\}.$$

Définition 4.6. Soient A une $\mathbb{Z}/2$-algèbre commutative unitaire, $n \geq 2$ et p, $q \geq 1$. On définit *un morphisme de* $\mathbb{Z}/2$*-modules*
$$E : T^n(A) \otimes T^p(A) \otimes T^q(A) \longrightarrow T^{n+p+q-2}(A),$$

par la formule suivante :

$E(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p, c_0 \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_q) =$
$\sum_{i=0}^{n-2} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p a_{i+1} c_0 \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_q a_{i+2} \otimes a_{i+3} \otimes \cdots \otimes a_n + \sum a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j_0} b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p a_{j_0+1} \otimes a_{j_0+2} \otimes \cdots \otimes a_{j_1} c_0 \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_q a_{j_1+1} \otimes a_{j_1+2} \otimes \cdots \otimes a_n.$

La deuxième somme est prise sur toutes les façons de choisir $\{j_0, j_1\}$ tels que $j_0 \geq 0$, $j_0 + 1 < j_1$ et $j_1 \leq n - 1$.

Proposition 4.7. *Soient A une $\mathbb{Z}/2$-algèbre commutative unitaire, $n \geq 2$ et p, $q \geq 1$. Soient $w_1 = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in T^n(A)$, $w_2 = b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p \in T^p(A)$ et $w_3 = c_0 \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_q \in T^q(A)$. On a alors :*

$w_1 \smile_1 w_2 w_3 = w_2(w_1 \smile_1 w_3) + (w_1 \smile_1 w_2) w_3 + DE(w_1, w_2, w_3) + E(D(w_1), w_2, w_3) + E(w_1, D(w_2), w_3) + E(w_1, w_2, D(w_3))$

Démonstration. On notera la première somme de E par E_1 et la deuxième par E_2. La somme des termes de

$$E_1(D(w_1), w_2, w_3) + E_1(w_1, D(w_2), w_3) + E_1(w_1, w_2, D(w_3)),$$

où se situent les 1 donne $DE_1(w_1, w_2, w_3)$.
La somme des termes de

$$E_2(D(w_1), w_2, w_3) + E_2(w_1, D(w_2), w_3) + E_2(w_1, w_2, D(w_3)),$$

où se situent les 1 donne $DE_2(w_1, w_2, w_3)$.
Ensuite la somme des termes correspondant au choix de $j_1 = n$ dans

$$E_2(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1, w_2, w_3) +$$

le terme correspondant au $i = n - 1$ dans

$$E_1(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1, w_2, w_3)$$

donne

$$(w_1 \smile_1 w_2) w_3.$$

La somme des termes correspondant au choix de $j_0 = 0$ dans

$$E_2(1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, w_2, w_3) +$$

le terme correspondant au $i = 0$ dans

$$E_1(1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, w_2, w_3)$$

donne

$$w_2(w_1 \smile_1 w_3),$$

et la somme des termes de

$$E_1(D(w_1), w_2, w_3) = E_1(\sum_{s=0}^{n+1} \delta_s(w_1), w_2, w_3)$$

correspondant au choix de $i = s - 1$ donne

$$w_1 \smile_1 w_2 w_3.$$

Enfin la somme des termes restant dans

$$E(D(w_1), w_2, w_3) + E(w_1, D(w_2), w_3) + E(w_1, w_2, D(w_3))$$

donne 0. □

Soient $n \geq 2$, p et $q \geq 1$. Pour tout couple $\{j_0, j_1\}$ vérifiant $j_0 \geq 0$, $j_0+1 < j_1$ et $j_1 \leq n-1$, définissons l'application $\varphi_{\{j_0,j_1\},n,p,q} : [n] \longrightarrow [n+p+q-2]$ par

$$\varphi_{\{j_0,j_1\},n,p,q}(j) = \begin{cases} j & \text{si} \quad 0 \leq j \leq j_0; \\ j + p - 1 & \text{si} \quad j_0 + 1 \leq j \leq j_1; \\ j + p + q - 2 & \text{si} \quad j_1 + 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Pour tout $0 \leq i \leq n-2$, notons $\phi_{i,n,p,q} : [n] \longrightarrow [n+p+q-2]$ l'application définie par

$$\phi_{i,n,p,q}(j) = \begin{cases} j & \text{si} \quad 0 \leq j \leq i; \\ i + p & \text{si} \quad j = i + 1; \\ j + p + q - 2 & \text{si} \quad i + 2 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Définition 4.8. Soient T une AGS sur $\mathbb{Z}/2$, $n \geq 2$ et p, $q \geq 1$. On définit le morphisme

$$E : T^n \otimes T^p \otimes T^q \longrightarrow T^{n+p+q-2}$$

par

$$E(w_1, w_2, w_3) = \sum_{i=0}^{n-2} T(\phi_{i,n,p,q})(w_1) T(\beta_{i,n+q-1,p})(w_2) T(\beta_{i+p,n+p-1,q})(w_3)$$
$$+ \sum T(\varphi_{\{j_0,j_1\},n,p,q})(w_1) T(\beta_{j_0,n+q-1,p})(w_2) T(\beta_{j_1+p-1,n+p-1,q})(w_3).$$

où les applications β sont définies dans la démonstration 4.8.

Proposition 4.9. *Soient $n \geq 2$ et p, $q \geq 1$. Soient T une* AGS *sur $\mathbb{Z}/2$, $w_1 \in T^n$, $w_2 \in T^p$ et $w_3 \in T^q$. On a alors l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} w_1 \smile_1 w_2w_3 = w_2(w_1 \smile_1 w_3) + (w_1 \smile_1 w_2)w_3 + DE(w_1, w_2, w_3) \\ + E(D(w_1), w_2, w_3) + E(w_1, D(w_2), w_3) + E(w_1, w_2, D(w_3)). \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $n \geq 2$ et p, $q \geq 1$. On notera $f_{n,p,q}$ l'inclusion de $[n]$ dans $[n+p+q+2]$, $g_{n,p,q} : [p] \longrightarrow [n+p+q+2]$ l'application définie par $g_{n,p,q}(j) = j+n+1$ et $h_{n,p,q} : [q] \longrightarrow [n+p+q+2]$ l'application définie par $h_{n,p,q}(j) = j+n+p+2$. Pour tout $0 \leq i \leq n-2$, on a

$$\phi_{i,n,p,q} = \phi'_{i,n,p,q} \circ f_{n,p,q} \qquad \beta_{i,n+q-1,p} = \phi'_{i,n,p,q} \circ g_{n,p,q}$$

et

$$\beta_{i+p,n+p-1,q} = \phi'_{i,n,p,q} \circ h_{n,p,q}$$

où $\phi'_{i,n,p,q} : [n+p+q+2] \longrightarrow [n+p+q-2]$ est l'application définie par

$$\phi'_{i,n,p,q}(j) = \begin{cases} j & \text{si} \quad 0 \leq j \leq i; \\ i+p & \text{si} \quad j = i+1; \\ j+p+q-2 & \text{si} \quad i+2 \leq j \leq n; \\ j+i-n-1 & \text{si} \quad n+1 \leq j \leq n+p+1; \\ j+i-n-2 & \text{si} \quad n+p+2 \leq j \leq n+p+q+2. \end{cases}$$

et pour tout couple $\{j_0, j_1\}$ vérifiant $j_0 \geq 0$, $j_0+1 < j_1$ et $j_1 \leq n-1$, on a

$$\varphi_{\{j_0,j_1\},n,p,q} = \varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q} \circ f_{n,p,q} \qquad \beta_{j_0,n+q-1,p} = \varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q} \circ g_{n,p,q}$$

et

$$\beta_{j_1+p-1,n+p-1,q} = \varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q} \circ h_{n,p,q}$$

où $\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q} : [n+p+q+2] \longrightarrow [n+p+q-2]$ définie par

$$\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q}(j) = \begin{cases} j & \text{si} \quad 0 \leq j \leq j_0 \ ; \\ j+p-1 & \text{si} \quad j_0+1 \leq j \leq j_1 \ ; \\ j+p+q-2 & \text{si} \quad j_1+1 \leq j \leq n \ ; \\ j+j_0-n-1 & \text{si} \quad n+1 \leq j \leq n+p+1 \ ; \\ j+j_1-n-3 & \text{si} \quad n+p+2 \leq j \leq n+p+q+2. \end{cases}$$

On aura donc

$$E(w_1,w_2,w_3)=\sum_{i=0}^{n-2}T(\phi'_i,n,p,q)$$
$$+\sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q})(T(f_{n,p,q})(w_1)T(g_{n,p,q})(w_2)T(h_{n,p,q})(w_3)).$$

$$E(D(w_1),w_2,w_3)=$$
$$\Big(\sum_{i=0}^{n-1}T(\phi'_{i,n+1,p,q})+\sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n+1,p,q})(T(f_{n+1,p,q})(D(w_1))\Big)$$
$$T(g_{n+1,p,q})(w_2)T(h_{n+1,p,q})(w_3))$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}T(\phi'_{i,n+1,p,q})+\sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n+1,p,q})$$
$$\Big(\sum_{s=0}^{n+1}T(f_{n+1,p,q}\circ\delta_s)(w_1)T(g_{n+1,p,q})(w_2)T(h_{n+1,p,q})(w_3)\Big).$$

Comme pour tout $0\leq s\leq n+1$, on a

$$f_{n+1,p,q}\circ\delta_s=\delta_s\circ f_{n,p,q}\qquad g_{n+1,p,q}=\delta_s\circ g_{n,p,q}$$

et $h_{n+1,p,q}=\delta_s\circ h_{n,p,q}$, alors

$$E(D(w_1),w_2,w_3)=$$
$$\Big(\sum_{i=0}^{n-1}T(\phi'_{i,n+1,p,q})+\sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n+1,p,q})\Big)$$
$$\sum_{s=0}^{n+1}T(\delta_s)(T(f_{n,p,q})(w_1)T(g_{n,p,q})(w_2)T(h_{n,p,q})(w_3)).$$

On a aussi

$$E(w_1,D(w_2),w_3)=$$
$$\Big(\sum_{i=0}^{n-2}T(\phi'_{i,n,p+1,q})+\sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p+1,q})\Big)$$
$$\Big(\sum_{s=0}^{p+1}T(\delta_{s+n+1})\big(T(f_{n,p,q})(w_1)T(g_{n,p,q})(w_2)T(h_{n,p,q})(w_3)\big)\Big),$$

et

$$E(w_1, w_2, D(w_3)) =$$
$$\Big(\sum_{i=0}^{n-2} T(\phi'_{i,n,p,q+1}) + \sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q+1})\Big)$$
$$\Big(\sum_{s=0}^{q+1} T(\delta_{s+n+p+2})(T(f_{n,p,q})(w_1)T(g_{n,p,q})(w_2)T(h_{n,p,q})(w_3))\Big).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} w_1 \smile_1 w_2w_3 &= \sum_{i=0}^{n-1} T(\alpha_{i,n,p+q})(w_1)T(\beta_{i,n,p+q})(T(f_{p,q})(w_2)T(g_{p,q})(w_3)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} T(\alpha_{i,n,p+q})(w_1)T(\beta_{i,n,p+q}f_{p,q})(w_2)T(\beta_{i,n,p+q}g_{p,q})(w_3)), \end{aligned}$$

où les applications $\alpha_{i,n,p+q}$, $\beta_{i,n,p+q}$, $f_{p,q}$ et $g_{p,q}$ sont définis dans la démonstration 4.8. Or pour tout $0 \leq i \leq n-1$, on a

$$\alpha_{i,n,p+q} = \sigma_{0,q,i,i} \circ f_{n,p,q}, \quad \beta_{i,n,p+q}f_{p,q} = \sigma_{0,q,i,i} \circ g_{n,p,q}$$

et $\beta_{i,n,p+q}g_{p,q} = \sigma_{0,q,i,i} \circ h_{n,p,q}$, l'application

$$\sigma_{a,b,c,d} : [n+p+q+2] \longrightarrow [n+p+q-1]$$

est définie pour tous a, b, c et $d \in \mathbb{N}$ par

$$\sigma_{a,b,c,d}(j) = \begin{cases} j+a & \text{si} \quad 0 \leq j \leq i; \\ j+p+b-1 & \text{si} \quad i+1 \leq j \leq n; \\ j+c-n-1 & \text{si} \quad n+1 \leq j \leq n+p+1; \\ j+d-n-2 & \text{si} \quad n+p+2 \leq j \leq n+p+q+2. \end{cases}$$

donc

$$w_1 \smile_1 w_2w_3 =$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} T(\sigma_{0,q,i,i})(T(f_{n,p,q})(w_1)T(g_{n,p,q})(w_2)T(h_{n,p,q})(w_3)).$$

De même on montre que

$$w_2(w_1 \smile_1 w_3) = \sum_{i=0}^{n-1} T(\sigma_{p,q,0,i})(T(f_{n,p,q})(w_1)T(g_{n,p,q})(w_2)T(h_{n,p,q})(w_3)),$$

et

$$(w_1 \smile_1 w_2)w_3 = \sum_{i=0}^{n-1} T(\sigma_{0,0,i,n-1})(T(f_{n,p,q})(w_1)T(g_{n,p,q})(w_2)T(h_{n,p,q})(w_3)).$$

Si T est l'algèbre des formes différentielles étendues,

$$w_1 = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in T^n(A), \quad w_2 = b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p \in T^p(A)$$

et $w_3 = c_0 \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_q \in T^q(A)$, on a

$$T(f_{n,p,q})(w_1)T(g_{n,p,q})(w_2)T(h_{n,p,q})(w_3) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p \otimes c_0 \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_q,$$

et

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=0}^{n-1} T(\sigma_{0,q,i,i}) + T(\sigma_{p,q,0,i}) + T(\sigma_{0,0,i,n-1})\Big) \\
&\qquad (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p \otimes c_0 \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_q) \\
&\qquad = \sum_{s=0}^{n+p+q-1} T(\delta_s)(\sum_{i=0}^{n-2} T(\phi'_{i,n,p,q}) + \sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q})) \\
&\qquad + (\sum_{i=0}^{n-1} T(\phi'_{i,n+1,p,q}) + \sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n+1,p,q})) \sum_{s=0}^{n+1} T(\delta_s) \\
&\qquad + (\sum_{i=0}^{n-2} T(\phi'_{i,n,p+1,q}) + \sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p+1,q})) \sum_{s=0}^{p+1} T(\delta_{s+n+1}) \\
&\qquad + (\sum_{i=0}^{n-2} T(\phi'_{i,n,p,q+1}) + \sum T(\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q+1})) \sum_{s=0}^{q+1} T(\delta_{s+n+p+2}) \\
&\qquad (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p \otimes c_0 \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_q),
\end{aligned}$$

donc d'après le théorème 3.5 on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_{0,q,i,i}+\sigma_{p,q,0,i}+\sigma_{0,0,i,n-1}\\
&\qquad=\sum_{s=0}^{n+p+q-1}\delta_s(\sum_{i=0}^{n-2}\phi'_{i,n,p,q}+\sum\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q})\\
&\qquad+(\sum_{i=0}^{n-1}\phi'_{i,n+1,p,q}+\sum\varphi'_{\{j_0,j_1\},n+1,p,q})\sum_{s=0}^{n+1}\delta_s\\
&\qquad+(\sum_{i=0}^{n-2}\phi'_{i,n,p+1,q}+\sum\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p+1,q})\sum_{s=0}^{p+1}\delta_{s+n+1}\\
&\qquad+(\sum_{i=0}^{n-2}\phi'_{i,n,p,q+1}+\sum\varphi'_{\{j_0,j_1\},n,p,q+1})\sum_{s=0}^{q+1}\delta_{s+n+p+2}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

5. Opérations de Browder

Soient T un foncteur définissant une AGS et T^* la R-algèbre différentielle graduée associée à T. Considérons $w_n\in Z^n(T^*)$ et $\theta_p\in Z^p(T^*)$. On a alors

$$\begin{aligned}
D(w_n\smile_i\theta_p-(-1)^{i+np}\theta_p\smile_i w_n)&=(-1)^{n+p-i}w_n\smile_{i-1}\theta_p\\
&+(-1)^{np+p+n}\theta_p\smile_{i-1}w_n\\
&-(-1)^{np+i}((-1)^{n+p-i}\theta_p\smile_{i-1}w_n+(-1)^{np+p+n}w_n\smile_{i-1}\theta_p)=0.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant $\theta_{p-1}\in T^{p-1}$, on a alors

$$\begin{aligned}
&w_n\smile_i D(\theta_{p-1})-(-1)^{i+np}D(\theta_{p-1})\smile_i w_n\\
&\qquad=D((-1)^n w_n\smile_i\theta_{p-1}-(-1)^{i+np}\theta_{p-1}\smile_i w_n).
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout i et toute AGS T, l'application qui à un couple (w_n,θ_p) de $T^n\times T^p$ associe $w_n\smile_i\theta_p-(-1)^{i+np}\theta_p\smile_i w_n$ induit un morphisme

$$\psi^i: H^n(T^*)\times H^p(T^*)\longrightarrow H^{n+p-i}(T^*).$$

Proposition 5.1. *Soit T une* AGS*. Pour tout $i \geq 0$, le morphisme*

$$\psi^i : H^n(T^*) \times H^p(T^*) \longrightarrow H^{n+p-i}(T^*)$$

vérifie les propriétés suivantes :

(1) *Pour tout morphisme $f : T \longrightarrow T'$, on a $\psi^i(f^*, f^*) = f^*\psi^i$.*

(2) $\psi^0(w, \theta) = w\theta - (-1)^{np}\theta w$.

(3) $\psi^i(w, \theta) = -(-1)^{i+np}\psi^i(\theta, w)$.

6. Algèbre de Gerstenhaber

Définition 6.1. Soit $\Re^*$ un R-module gradué muni de deux produits. Un premier produit

$$\begin{array}{ccc} \Re^p \otimes \Re^q & \to & \Re^{p+q} \\ a \otimes b & \mapsto & ab \end{array}$$

et un deuxième produit (crochet de Lie)

$$\begin{array}{ccc} \Re^p \otimes \Re^q & \to & \Re^{p+q-1} \\ a \otimes b & \longmapsto & [a, b] \end{array}$$

On dit que $\Re^*$ est *une algèbre de Gerstenhaber* si les deux produits satisfont les conditions suivantes :

- Associativité du premier produit : $a(bc) = (ab)c$.
- Commutativité du premier produit : $ab = (-1)^{|a||b|}ba$.
- Commutativité du deuxième produit : $[b, a] = (-1)^{|a||b|}[a, b]$.
- Identité de Jacobi :
  $(-1)^{|a||c|}[a, [b, c]] + (-1)^{|a||b|}[b, [c, a]] + (-1)^{|c||b|}[c, [a, b]] = 0$.
- Identité de Poisson : $[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{(|a|-1)|b|}b[a, c]$.

Théorème 6.2. *Soient T une* AGS*, $w_1 \in T^n$, $w_2 \in T^p$ et $w_3 \in T^q$. On a alors :*

$$\begin{aligned}(w_1 \smile_1 w_2) \smile_1 w_3 &- (-1)^{(p-1)(q-1)}(w_1 \smile_1 w_3) \smile_1 w_2 \\ &= (-1)^{q+1}w_1 \smile_1 (w_2 \smile_1 w_3) - (-1)^{q(p-1)}w_1 \smile_1 (w_3 \smile_1 w_2).\end{aligned}$$

Démonstration. On va utiliser les mêmes notations de la proposition 4.7. Soient donc $w_1 \in T^n$, $w_2 \in T^p$ et $w_3 \in T^q$. On a alors

$$\begin{aligned}
&(w_1 \smile_1 w_2) \smile_1 w_3 = \\
&\quad \sum_{r=0}^{p+n-2} (-1)^{(p+n-1-r)(q+1)} T(\alpha_{r,n+p-1,q})(w_1 \smile_1 w_2) T(\beta_{r,n+p-1,q})(w_3) \\
&\qquad = \sum_{r=0}^{p+n-2} (-1)^{(p+n-1-r)(q+1)} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n-i)(p+1)} \\
&\qquad\quad T(\alpha_{r,n+p-1,q}\alpha_{i,n,p})(w_1) T(\alpha_{r,n+p-1,q}\beta_{i,n,p})(w_2) T(\beta_{r,n+p-1,q})(w_3).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(w_1 \smile_1 w_3) \smile_1 w_2 = \\
&\quad \sum_{s=0}^{n+q-2} (-1)^{(n+q-1-s)(p+1)} T(\alpha_{s,q+n-1,p})(w_1 \smile_1 w_3) T(\beta_{s,q+n-1,p})(w_2) \\
&\qquad = \sum_{s=0}^{n+q-2} (-1)^{(n+q-1-s)(p+1)} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n-i)(q+1)} \\
&\qquad\quad T(\alpha_{s,q+n-1,p}\alpha_{i,n,q})(w_1) T(\alpha_{s,q+n-1,p}\beta_{i,n,q})(w_3) T(\beta_{s,q+n-1,p})(w_2).
\end{aligned}$$

On a d'une part :

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{i-1} (-1)^{(p+n-1-r)(q+1)} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{(n-i)(p+1)} \\
&\quad T(\alpha_{r,n+p-1,q}\alpha_{i,n,p})(w_1) T(\alpha_{r,n+p-1,q}\beta_{i,n,p})(w_2) T(\beta_{r,n+p-1,q})(w_3) \\
&\qquad = \sum_{i=r+1}^{n-1} (-1)^{(n-i)(p+1)} \sum_{r=0}^{n-2} (-1)^{(p+n-1-r)(q+1)} \\
&\qquad\quad T(\alpha_{r,n+p-1,q}\alpha_{i,n,p})(w_1) T(\alpha_{r,n+p-1,q}\beta_{i,n,p})(w_2) T(\beta_{r,n+p-1,q})(w_3).
\end{aligned}$$

Or pour tous $0 \leq r \leq n-2$ et $r+1 \leq i \leq n-1$

$$\alpha_{r,n+p-1,q}\alpha_{i,n,p} = \alpha_{i+q-1,q+n-1,p}\alpha_{r,n,q} \quad \beta_{r,n+p-1,q} = \alpha_{i+q-1,q+n-1,p}\beta_{r,n,q}$$

et

$$\alpha_{r,n+p-1,q}\beta_{i,n,p} = \beta_{i+q-1,q+n-1,p}$$

donc on a

$$\sum_{r=0}^{i-1}(-1)^{(p+n-1-r)(q+1)}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{(n-i)(p+1)}$$
$$T(\alpha_{r,n+p-1,q}\alpha_{i,n,p})(w_1)T(\alpha_{r,n+p-1,q}\beta_{i,n,p})(w_2)T(\beta_{r,n+p-1,q})(w_3)$$
$$=(-1)^{(p-1)(q+1)}\sum_{i=r+1}^{n-1}(-1)^{(n-i)(p+1)}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{(n-r)(q+1)}$$
$$T(\alpha_{i+q-1,q+n-1,p}\alpha_{r,n,q})(w_1)T(\beta_{i+q-1,q+n-1,p})(w_2)T(\alpha_{i+q-1,q+n-1,p}\beta_{r,n,q})(w_3)$$
$$=(-1)^{(p-1)(q+1)}\sum_{s=r+q}^{n+q-2}(-1)^{(n+q-1-s)(p+1)}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{(n-r)(q+1)}$$
$$T(\alpha_{s,q+n-1,p}\alpha_{r,n,q})(w_1)T(\beta_{s,q+n-1,p})(w_2)T(\alpha_{s,q+n-1,p}\beta_{r,n,q})(w_3).$$

En raissonant de même façon, on montre que

$$\sum_{r=i+p}^{p+n-2}(-1)^{(p+n-1-r)(q+1)}\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{(n-i)(p+1)}$$
$$T(\alpha_{r,n+p-1,q}\alpha_{i,n,p})(w_1)T(\alpha_{r,n+p-1,q}\beta_{i,n,p})(w_2)T(\beta_{r,n+p-1,q})(w_3)$$
$$=(-1)^{(p-1)(q+1)}\sum_{s=0}^{i-1}(-1)^{(n+q-1-s)(p+1)}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{(n-i)(q+1)}$$
$$T(\alpha_{s,q+n-1,p}\alpha_{i,n,q})(w_1)T(\beta_{s,q+n-1,p})(w_2)T(\alpha_{s,q+n-1,p}\beta_{i,n,q})(w_3).$$

D'autre part

$$\sum_{r=i}^{i+p-1}(-1)^{(p+n-1-r)(q+1)}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{(n-i)(p+1)}$$
$$T(\alpha_{r,n+p-1,q}\alpha_{i,n,p})(w_1)T(\alpha_{r,n+p-1,q}\beta_{i,n,p})(w_2)T(\beta_{r,n+p-1,q})(w_3)$$
$$=\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{(p+n-1-j)(q+1)}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{(n-i)(p+1)-i(q+1)}$$
$$T(\alpha_{i+j,p+n-1,q}\alpha_{i,n,p})(w_1)T(\alpha_{i+j,p+n-1,q}\beta_{i,n,p})(w_2)T(\beta_{i+j,p+n-1,q})(w_3).$$

Comme on a, pour tous $0\le i\le n-1$ et $0\le j\le p-1$,

$$\alpha_{i+j,p+n-1,q}\alpha_{i,n,p}=\alpha_{i,n,p+q-1}\quad \alpha_{i+j,p+n-1,q}\beta_{i,n,p}=\beta_{i,n,p+q-1}\alpha_{j,p,q}$$

et

$$\beta_{i+j,p+n-1,q}=\beta_{i,n,p+q-1}\beta_{j,p,q}$$

alors

$$\sum_{r=i}^{i+p-1}(-1)^{(p+n-1-r)(q+1)}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{(n-i)(p+1)}$$
$$T(\alpha_{r,n+p-1,q}\alpha_{i,n,p})(w_1)T(\alpha_{r,n+p-1,q}\beta_{i,n,p})(w_2)T(\beta_{r,n+p-1,q})(w_3)$$
$$= (-1)^{q+1}\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{(p-j)(q+1)}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{(n-i)(p+q)}$$
$$T(\alpha_{i,n,p+q-1})(w_1)T(\beta_{i,n,p+q-1}\alpha_{j,p,q})(w_2)T(\beta_{i,n,p+q-1}\beta_{j,p,q})(w_3)$$
$$= (-1)^{q+1}w_1 \smile_1 (w_2 \smile_1 w_3).$$

De la même manière, on montre que

$$\sum_{s=i}^{i+q-1}(-1)^{(n+q-1-s)(p+1)}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{(n-i)(q+1)}$$
$$T(\alpha_{s,q+n-1,p}\alpha_{i,n,q})(w_1)T(\alpha_{s,q+n-1,p}\beta_{i,n,q})(w_3)T(\beta_{s,q+n-1,p})(w_2)$$
$$= (-1)^{p+1)}w_1 \smile_1 (w_3 \smile_1 w_2).$$

D'où l'identité recherchée. □

Corollaire 6.3. *Soient T une* AGS*, $w_1 \in T^n$, $w_2 \in T^p$ et $w_3 \in T^q$. On a alors l'identité de Jacobi*

$$(-1)^{n(q+p)}\psi^1(w_2, \psi^1(w_3, w_1)) + (-1)^{q(n+p)}\psi^1(w_3, \psi^1(w_1, w_2)) + \psi^1(w_1, \psi^1(w_2, w_3) = 0.$$

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du théorème précédent. □

Proposition 6.4. *Soient T une* AGS *sur $\mathbb{Z}/2$, $x \in H^n(T^*)$, $y \in H^p(T^*)$ et $z \in H^q(T^*)$. On a alors l'identité de Poisson suivante*

$$\psi^1(x, yz) = \psi^1(x, y)z + y\psi^1(x, z).$$

Démonstration. On a

$$\psi^1(x, yz) = x \smile_1 yz + yz \smile_1 x,$$

et comme d'aprés la formule de Hirsch

$$yz \smile_1 x = y(z \smile_1 x) + (y \smile_1 x)z$$

Il nous reste donc à montrer que pour tous $w_1 \in Z^n$, $w_2 \in Z^p$ et $w_3 \in Z^q$, $w_1 \smile_1 w_2w_3$ a la même classe de cohomologie que $(w_1 \smile_1 w_2)w_3 +$

$w_2(w_1 \smile_1 w_3)$. Pour $n \geq 2$ et p, $q \geq 1$, le résultat découle immédiatement de la proposition 4.15. Pour $n = 1$, p et $q \geq 1$, on a par définition

$$w_1 \smile_1 w_2 w_3 = T(h)(w_1)T(f_{p,q})(w_2)T(g_{p,q})(w_3)$$

où les applications $f_{p,q}$ et $g_{p,q}$ sont définis dans la démonstration 4.8 et $h : [1] \longrightarrow [q+p]$ est définie par $h(0) = 0$ et $h(1) = p+q$. Or on a $h = h'\delta_1$ où $h' : [2] \longrightarrow [q+p]$ est définie par $h'(0) = 0$, $h'(1) = p$ et $h'(2) = p+q$. Puisque $D(w_1) = 0$, on a alors

$$\begin{gathered} w_1 \smile_1 w_2 w_3 = \\ T(h'\delta_0)(w_1)T(f_{p,q})(w_2)T(g_{p,q})(w_3) + T(h'\delta_2)(w_1)T(f_{p,q})(w_2)T(g_{p,q})(w_3) \end{gathered}$$

et comme on a $h'\delta_0 = g_{p,q}h''_q$ et $h'\delta_2 = f_{p,q}h''_p$, où pour tout $s \geq 1$, $h''_s : [1] \longrightarrow [s]$ vérifiant $h''_s(0) = 0$ et $h''_s(1) = s$, on a donc

$$\begin{gathered} w_1 \smile_1 w_2 w_3 = T(f_{p,q}h''_p)(w_1)T(f_{p,q})(w_2)T(g_{p,q})(w_3) + \\ T(g_{p,q}h''_q)(w_1T(f_{p,q})(w_2)T(g_{p,q})(w_3) = (w_1 \smile_1 w_2)w_3 + w_2(w_1 \smile_1 w_3) \end{gathered}$$

Pour $p = 0$, n et $q \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} w_1 \smile_1 w_2 w_3 &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} T(\alpha_{i,n,q})(w_1)T(\beta_{i,n,q})(T(f_{0,q})(w_2)T(g_{0,q})(w_3)) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} T(\alpha_{i,n,q})(w_1)T(\beta_{i,n,q}f_{0,q})(w_2)T(\beta_{i,n,q})(w_3)) \end{aligned}$$

et comme pour tout $0 \leq i \leq n-1$, on a $\beta_{i,n,q}f_{0,q} = r_i \circ \delta_0$, où $r_i : [1] \longrightarrow [n+q-1]$ est définie par $r_i(0) = 0$ et $r_i(1) = i$. On aura donc $T(\beta_{i,n,q}f_{0,q}) = T(r_i \circ \delta_1)$ car $D(w_2) = 0$. Donc

$$w_1 \smile_1 w_2 w_3 = w_2(w_1 \smile_1 w_3)$$

Pour $q = 0$, n et $p \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} w_1 \smile_1 w_2 w_3 &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} T(\alpha_{i,n,p})(w_1)T(\beta_{i,n,p})(T(f_{p,0})(w_2)T(g_{p,0})(w_3)) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} T(\alpha_{i,n,p})(w_1)T(\beta_{i,n,p})(w_2)T(\beta_{i,n,p}g_{p,0})(w_3)) \end{aligned}$$

or pour tout $0 \leq i \leq n-1$, on a $\beta_{i,n,p}g_{p,0} = t_i \circ \delta_0$ où $t_i : [1] \longrightarrow [n+p-1]$ vérifie $t_i(0) = n+p-1$ et $t_i(1) = p+i$. Et comme $D(w_3) = 0$, donc $T(\beta_{i,n,p}g_{p,0}) = T(t_i \circ \delta_1) = T(g_{n+p-1,0})$. D'où

$$w_1 \smile_1 w_2 w_3 = (w_1 \smile_1 w_2)w_3$$

□

Proposition 6.5. *Les deux propositions 5.2.3 et 5.2.5 impliquent que si T est une AGS sur $\mathbb{Z}/2$, alors l'algèbre de cohomologie $H^*(T^*)$ est une algèbre de Gerstenhaber.*

Remarques 6.6. La proposition 6.8 induit le fait que :

- Pour toute $\mathbb{Z}/2$-algèbre A, la cohomologie de $T^*(A)$ est une algèbre de Gerstenhaber.
- Pour tout espace topologique X qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe, l'algèbre de cohomologie $H^*(X, \mathbb{Z}/2)$ est une algèbre de Gerstenhaber.

Références

[1] N. Battikh – « Cup i-produits sur les formes différentielles non commutatives et carrés de steenrod », *Journal of Algebra* **313** (2007), p. 531–553.

[2] ______, « Algèbres graduées avec symétries », *Journal of Algebra* **325** (2011), p. 49–73.

[3] A. Connes – « Non commutative différential geometry », *Pub. Math. I.H.E.S* **62** (1985), p. 257–360.

[4] J. Cuntz & D. Quillen – « Cyclic homology and nonsingularity », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), no. 2, p. 373–442.

[5] A. Dold & R. Thom – « Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis », *C. R. Acad. Sci. Paris* **242** (1956), p. 1680–1682.

[6] M. Gerstenhaber – « The cohomology structure of an associative ring », *Ann of Math.* **78** (1963), p. 267–288.

[7] M. Karoubi – « Formes différentielles non commutatives et cohomology à coefficients arbitraires », *Transaction of the AMS* **347** (1995), p. 4277–4299.

[8] ______, « Formes topologiques non commutatives », *Annales scientifiques. E. N. S.* **28** (1995), p. 477–492.

[9] D. Kraines – « Massey higher products », *Trans. Amer. Math. Soc.* **124** (1966), p. 431–449.

[10] J. P. May – « A general algebraic approach to Steenrod operations », in *The Steenrod Algebra and its Applications (Proc. Conf. to Celebrate N. E. Steenrod's Sixtieth Birthday, Battelle Memorial Inst., Columbus, Ohio, 1970)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 168, Springer, Berlin, 1970, p. 153–231.

[11] N. E. Steenrod – « Products of cocycles and extensions of mappings », *Ann. of Math. (2)* **48** (1947), p. 290–320.

[12] ______, *Cohomology operations*, Lectures by N. E. Steenrod written and revised by D. B. A. Epstein. Annals of Mathematics Studies, No. 50, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[13] E. Thomas – « The suspension of the generalised pontrjagin cohomology operations », *Pacific J. Math.* (1959), p. 897–911.

Arwa Abbassi
Université de Tunis El Manar
Faculté des Sciences de Tunis
Département de mathématiques
El Manar 2092, Tunisie
abbassi.arwa@yahoo.fr