

ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL


HIDEKI MIYACHI & KEN'ICHI OHSHIKA

Une formule différentielle de la longueur extrémale et ses applications

Volume 24, n° 1 (2017), p. 115-133.

http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2017__24_1_115_0

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2017, Certains droits réservés.

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal »
(<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales
d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>).

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques Blaise Pascal
de l'université Clermont Auvergne, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Une formule différentielle de la longueur extrémale et ses applications

HIDEKI MIYACHI
KEN'ICHI OHSHIKA

Résumé

Pour un chemin linéaire par morceaux dans l'espace des laminations mesurées sur une surface hyperbolique, nous démontrons une formule différentielle de la fonction de la longueur extrémale exprimée par le nombre d'intersection. Nous donnerons deux applications de cette formule. D'abord nous montrerons la convexité stricte de la boule unité de l'espace des laminations mesurées par rapport à la longueur extrémale, et ensuite donnerons un plongement de l'espace de Teichmüller dans l'espace vectoriel défini par un réseau ferroviaire, lequel correspond, dans le cadre de la géométrie de longueur extrémale, aux coordonnées d'étirement de Thurston.

A differential formula of extremal length and its applications

Abstract

For a piecewise linear path in the measured lamination space on a hyperbolic surface, we shall prove a differential formula of the extremal length function expressed by the intersection number. We shall also present two applications of this formula. We first show the strict convexity of the unit ball in the measured lamination space with respect to the extremal length, and then give an embedding of Teichmüller space into a vector space defined by a train track, which corresponds, in the framework of the extremal length geometry, to Thurston's shear coordinates.

1. Introduction

La longueur extrémale et la longueur hyperbolique des courbes simples fermées sont des quantités géométriques importantes dans la théorie de Teichmüller. Il y a deux distances naturelles définies dans l'espace de Teichmüller : la distance lipschitzienne et la distance de Teichmüller. La distance lipschitzienne correspond à la géométrie hyperbolique et la distance de Teichmüller à ce que Gardiner et Masur ont appelé la géométrie

Mots-clés : longueur extrémale, coordonnées d'étirement de Thurston.

Classification math. : 30F60.

de longueur extrémale. Récemment, comme on voit dans la table de [11], beaucoup d'affinités entre les géométries des deux distances ont été trouvées. Le but de cet article est d'ajouter deux nouveaux contenus à cette liste d'affinités.

Soient S une surface compacte connexe sans ou avec bord dont l'intérieur a une métrique hyperbolique complète d'aire finie, et \mathcal{ML} l'espace des laminations géodésiques mesurées sur S . Soient y un point dans l'espace de Teichmüller et $\{\alpha_t\}_{t \in [0, \delta)}$ un chemin dans \mathcal{ML} qui est dérivable à droite en $t = 0$ par rapport de la structure linéaire par morceaux de \mathcal{ML} . On désigne par $\dot{\alpha}_0$ la dérivée à droite en $t = 0$, ce qu'on peut considérer comme une distribution hölderienne transverse sur l'espace des géodésiques dans le plan hyperbolique.

Dans l'article [9], on a obtenu la formule différentielle (à droite) suivante :

$$\left. \frac{d}{dt^+} \text{Ext}_y(\alpha_t) \right|_{t=0} = 2i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_0}(y)) \quad (1.1)$$

où $\text{Ext}_y(\alpha_t)$ désigne la longueur extrémale de α_t par rapport à y , et $F_{\alpha_0}(y)$ la lamination géodésique mesurée associée au feuilletage horizontal de la forme différentielle de Hubbard-Masur pour α_0 . Dans cet article, nous démontrerons la même formule par une approche alternative. Nous définissons le nombre d'intersection combinatoirement en utilisant des réseaux ferroviaires. Notre nouvelle approche rendra la formule plus utile pour des applications.

À la suite de la démonstration de la formule, nous donnerons ses deux applications. Dans la première application, nous montrerons que le bord de la boule unité par rapport à la longueur extrémale est une sous-variété de classe C^1 dans les coordonnées des réseaux ferroviaires. De plus, nous observerons qu'il y a une analogie entre deux géométries par rapport à la forme de la boule unité (voir §5). Dans la seconde application, nous présenterons un système de coordonnées de l'espace de Teichmüller dans l'espace vectoriel défini par un réseau ferroviare qui, dans la géométrie de longueur extrémale, correspond à celui de coordonnées de décalage introduit par Thurston et généralisé par Bonahon (voir §6).

Thurston [14] a donné une approximation de la longueur hyperbolique comme suit : quand $t > 0$ est suffisamment petit, une approximation au premier ordre de la longueur hyperbolique $\ell_y(\alpha_t)$ de la lamination mesurée α_t est donnée par

$$\ell_y(\alpha_t) \approx i(\alpha_t, \mathcal{F}_\lambda(y)) \quad (1.2)$$

où λ est le support de α_0 , et $\mathcal{F}_\lambda(y)$ est le feuilletage horocyclique associé à y par rapport aux coordonnées cataclismiques (voir [14, Thm. 7.1]). Notons que Bonahon a démontré que la longueur hyperbolique $\ell_y(\alpha_t)$ a une différentielle à droite en $t = 0$ ([2, Cor. 25]). De plus, comme on va le montrer dans §3.3, le nombre d'intersection dans (1.2) est linéaire. Donc, il est raisonnable d'espérer que la formule suivante soit valide :

$$\left. \frac{d}{dt^+} \ell_y(\alpha_t) \right|_{t=0} = i(\dot{\alpha}_0, \mathcal{F}_\lambda(y)). \quad (1.3)$$

Dans [11], Papadopoulos et Su ont observé que le feuilletage horocyclique $\mathcal{F}_\lambda(y)$ correspond au feuilletage horizontal F_{α_0} dans le cadre de la géométrie lipschizienne. De la même manière, on peut considérer notre formule (1.1) comme l'équivalent de celle de Thurston (1.2) dans le cadre de la géométrie de longueur extrémale.

Remerciements

Cet article a été préparé en grande partie lorsque nous séjournions au Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, dont nous apprécions cordialement l'hospitalité. Nous remercions chaleureusement Athanase Papadopoulos pour nous y avoir invités et pour une conversation stimulante pendant notre séjour. Nous remercions aussi le rapporteur pour ses remarques et suggestions qui nous ont été très utiles pour améliorer l'exposition. Le premier auteur remercie Mme Erika Tanaka pour son encouragement.

2. Généralités

2.1. Laminations géodésiques mesurées et réseaux ferroviaires

Soit S une surface compacte sans ou avec bord, dont l'intérieur admet une métrique hyperbolique complète d'aire finie. Nous fixons une telle métrique hyperbolique sur l'intérieur de S . Une *lamination géodésique* sur S est une réunion disjointe des géodésiques lisses simples formant un fermé de S . Une *lamination géodésique mesurée* α sur S est une lamination géodésique munie d'une mesure transverse invariante. Cette lamination géodésique s'appelle le *support* de α , et sera noté $|\alpha|$. Soient λ et μ deux

laminations géodésiques sur S . On dit que λ et μ remplissent S si toute courbe fermée dans $S - \lambda \cup \mu$ est ou bien homotopiquement triviale, ou bien homotope à une composante de ∂S . On dit que deux laminations géodésiques mesurées remplissent S si leurs supports le font.

Désignons par $\mathcal{ML} = \mathcal{ML}(S)$ l'espace des laminations géodésiques mesurées sur S . Thurston a montré qu'il existe une collection finie $\{k_1, \dots, k_n\}$ d'arcs génériques sur S telle que l'application $\mathcal{ML} \ni \lambda \mapsto (\lambda(k_1), \dots, \lambda(k_n)) \in \mathbb{R}^n$ induit un homéomorphisme de \mathcal{ML} sur une sous-variété linéaire par morceaux dans l'espace euclidéen \mathbb{R}^n , où l'on dit qu'un arc dans S est *générique* si toute intersection avec une géodésique simple est transverse (voir [3]).

Un *réseau ferroviaire* τ sur la surface S est un graphe sans bord plongé dans S dont les arêtes sont des segments différentiables de S tangents entre eux aux sommets. Pour un réseaux ferroviaire, on appelle les sommets les *aiguillages* et les arêtes *les branches*. On suppose qu'aucune composante de $S - \tau$ ne soit difféomorphe à un disque lisse ou un anneau lisse ou à un disque avec au plus deux pointes. On dit qu'un réseau ferroviaire est *générique* s'il est trivalent à toutes les aiguillages, et *maximal* s'il n'existe pas d'autre réseau ferroviaire qui le contient.

Un *chemin d'arêtes* dans un réseau ferroviaire τ est un arc (fini ou infini) différentiable sur τ dont la fonction dérivée est partout non-nulle et les extrémités (s'il y en a) sont des aiguillages.

Une *mesure* μ sur un réseau ferroviaire τ est une collection des poids (des nombres non-négatifs) donnés sur toutes les branche de τ qui satisfait la condition d'aiguillage suivante : en chaque aiguillage, la somme des poids de toutes les branches qui y aboutissent d'un côté coïncide avec celle de toutes les branches qui y aboutissent de l'autre côté. On associe à un réseau ferroviaire τ un espace vectoriel réel V_τ engendré par l'ensemble de ses branches, et un cône E_τ dans l'espace vectoriel défini par les conditions d'aiguillages. Chaque point de E_τ correspond à une mesure sur τ .

On dit qu'un réseau ferroviaire τ *porte* une lamination géodésique mesurée λ si le support de λ est isotope dans τ de sorte que chaque feuille est plongée comme un chemin d'arêtes dans τ . Une lamination géodésique mesurée portée par τ définit une mesure sur τ comme suivante. Pour chaque branche b de τ , nous fixons un arc qui la rencontre transversalement une fois et est disjoint des autres branches, et l'appelons une *traverse* de b . Après une isotopie, la lamination géodésique mesurée λ rencontre transversalement tous les traverses choisies pour les branches de τ .

LONGUEUR EXTRÉMALE

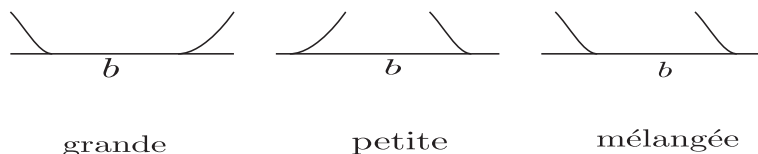


FIGURE 2.1. Branche grande, petite et mélangée

Ainsi, la mesure de λ induit une masse sur la traverse de chaque branche, qui définit le poids de la branche, et définit ainsi une mesure sur τ . D'un autre côté, on sait que (τ, μ) définit une lamination géodésique mesurée canoniquement (voir [12, §1.7]). Ainsi, on peut considérer E_τ comme un sous-ensemble de \mathcal{ML} . En particulier une courbe simple fermée α sur S qui est portée par τ induit une mesure sur τ . On désigne cette mesure par μ_α .

Pour un réseau ferroviaire τ , on dit que sa branche b est *grande* si pour chaque aiguillage v à l'extrémité de b , tout arc lisse ouvert dans τ passant par v rencontre b , et que b est *petite* si pour chaque aiguillage v à l'extrémité de b , il y a un arc ouvert dans τ passant par v qui ne rencontre pas b . Dans le cas restant, on appelle la branche b *mélangée* (Voir la figure 2.1).

Maintenant on va présenter une opération qui s'appelle *décollement* pour les réseaux ferroviaires. Soit b une branche grande de τ . On dit que l'on *découpe* τ le long de b lorsque on déforme τ pour produire trois sortes de réseaux ferroviaires τ_R , τ_O et τ_L munis d'une nouvelle branche b' (sans τ_O) comme dans la figure 2.2 (Voir aussi [12, §2.1]). Si τ porte une lamination géodésique λ qui rencontre un arc transversal à b , nous pouvons découper τ de sorte que le réseau ferroviaire τ' produit porte toujours λ et est, de plus, porté par τ . Dans ce cas, on dit qu'on a *découplé* τ le long de λ .

On dit qu'un réseau ferroviaire τ est *récurrent* si pour chaque branche b de τ , il y a une mesure μ sur τ telle que $\mu(b) > 0$. On dit qu'un réseau ferroviaire τ est *récurrent transversalement* si chaque branche de τ a une intersection non-vide avec une multi-courbe qui rencontre τ effectivement (voir la section suivante pour la définition). Finalement on dit qu'un réseau ferroviaire est *birécurrent* s'il est récurrent et récurrent transversalement en même temps, et *complet* s'il est bi-récurrent et maximal.

Thurston a montré que toute lamination géodésique mesurée α est portée par un réseau ferroviaire complet τ de sorte que la cône E_τ définisse un

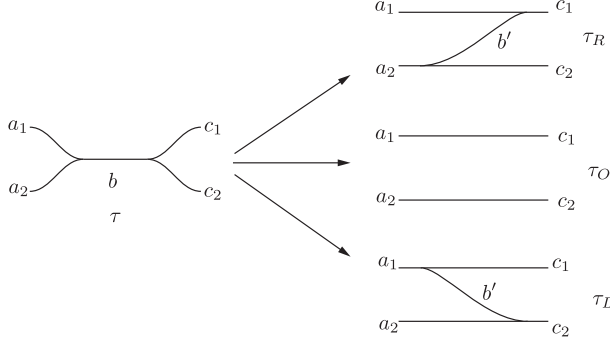


FIGURE 2.2. Réseaux ferroviaires τ_R , τ_O et τ_L construits par décollement.

voisinage de α dans $\mathcal{ML}(S)$ (voir [13, §8.10]. Voir aussi [10, Chap. 1] [12, Props. 1.4.9 et 1.7.6]). Dans cette situation, on dit que le système des coordonnées V_τ est *compatible* avec α .

2.2. La rencontre effective et le nombre d'intersection

On dit que deux réseaux ferroviaires τ_1 et τ_2 s'intersectent *génériquement* s'ils ne s'intersectent qu'à leur branches et que transversalement. On dit que deux réseaux ferroviaires τ_1 et τ_2 s'intersectent *effectivement* si en plus aucune composante de $S - (\tau_1 \cup \tau_2)$ n'est un bigone.

Soient τ_1 et τ_2 deux réseaux ferroviaires sur S qui s'intersectent effectivement. On définit le *nombre d'intersection géométrique* de $\mu_1 \in V_{\tau_1}$ et $\mu_2 \in V_{\tau_2}$ par

$$\mathcal{I}_{\tau_1, \tau_2}(\mu_1, \mu_2) = \sum_{p \in \tau_1 \cap \tau_2} \mu_1(b(\tau_1, p)) \mu_2(b(\tau_2, p)) \quad (2.1)$$

où $b(\tau, p)$ désigne la branche d'un réseau ferroviaire τ contenant le point $p \in \tau$ qui n'est pas un aiguillage. Soit α_i la lamination géodésique mesurée définie par (τ_i, μ_i) . Alors, on a

$$i(\alpha_1, \alpha_2) = \mathcal{I}_{\tau_1, \tau_2}(\mu_1, \mu_2) \quad (2.2)$$

où le côté gauche désigne le nombre d'intersection géométrique entre α_1 et α_2 (Voir [12, §3.4]).

LONGUEUR EXTRÉMALE

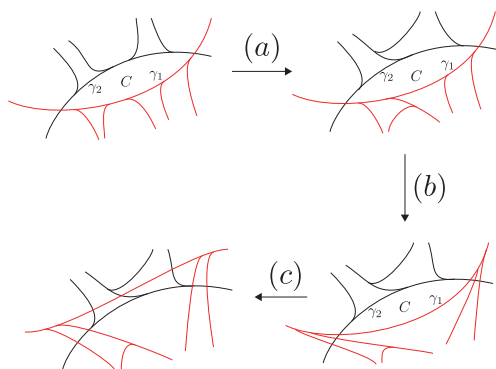


FIGURE 2.3. Mouvements dans la démonstration de la proposition 2.1

Proposition 2.1. *Soient λ_1 et λ_2 deux laminations géodésiques sur S . Si λ_1 et λ_2 remplissent S , il existe deux réseaux ferroviaires complets τ_1 et τ_2 qui s'intersectent effectivement tels que λ_i est portée par τ_i pour $i = 1, 2$. De plus, si λ_i est le support d'une lamination géodésique mesurée, on peut choisir τ_i qui est compatible avec λ_i .*

Démonstration. On sait déjà qu'il existe un réseau ferroviaire τ_i sur S qui porte λ_i . Supposons qu'il existe un bigone C que deux segments lisses $\gamma_1 \subset \tau_1$ et $\gamma_2 \subset \tau_2$ bordent.

- (a) S'il y a une grande branche $b \subset \gamma_i$ de τ_i , nous décollons τ_i le long de λ_i . En répétant cette opération un nombre fini de fois, on obtiendra deux réseaux ferroviaires τ'_1 et τ'_2 tels que chaque τ'_i porte λ_i , et qu'il y a des segments $\gamma_1 \subset \tau'_1$ et $\gamma_2 \subset \tau'_2$ bordant le même bigone C , mais que γ_1, γ_2 ne contiennent aucune grande branche. Donc, chaque segment γ_i contient au plus une petite branche et tous les autres sont mélangées. Voir (a) dans la figure 2.3.
- (b) On déplace les aiguillages sur γ_1 de sorte qu'il n'y ait pas d'aiguillages de τ'_1 sur γ_1 . Notons que même après ce déplacement, le nouveau τ'_1 porte toujours λ_1 . Voir (b) dans la figure 2.3.
- (c) En faisant glisser le segment γ_1 à travers le bigone C , on peut éliminer C . Puisque on a déjà éliminé les grandes branches sur γ_2 , ce glissement ne crée pas de nouveaux bigones. Voir (c) dans la figure 2.3.

On note que le nombre des bigones bordés par τ_1 et τ_2 diminue après ces opérations, tandis que les réseaux ferroviaires ainsi obtenus portent toujours λ_1 et λ_2 respectivement. Donc, après un nombre fini d'étapes, on obtiendra deux réseaux ferroviaires comme désiré.

Si une des laminations λ_i est le support d'une lamination géodésique mesurée, on peut choisir le réseau ferroviaire τ_i initialement complet (Voir §2.1). Il s'ensuit que le réseau ferroviaire dans l'étape finale est toujours complet puisque les opérations n'affectent pas la complétude du réseau ferroviaire (voir [12, Prop. 2.2.1]). De plus, si le réseau ferroviaire τ_i initial est compatible avec λ_i , la mesure μ_i correspondant à λ_i dans E_{τ_i} prend une valeur positive pour toute branche b de τ_i . Alors, il est facile de vérifier que le réseau ferroviaire dans l'étape finale est aussi compatible avec λ_i . \square

2.3. Les travaux de Hubbard-Masur et de Gardiner-Masur

Dans cette sous-section, on va résumer le travail de Hubbard-Masur [6] sur la correspondance entre les formes quadratiques différentielles holomorphes et les feuilletages mesurés, et les formules de Gardiner-Masur qui sont apparues dans [5]. Soient S une surface de Riemann compacte, et q une forme différentielle quadratique holomorphe sur S , c'est-à-dire que q est une forme différentielle localement exprimée comme $\phi(z)dz^2$ par rapport à chaque coordonnée locale complexe z de S où ϕ est une fonction holomorphe. La racine carrée \sqrt{q} de cette forme, pourvu qu'elle soit non-nulle, induit deux feuilletages mesurés sur S . L'un est le feuilletage horizontal de q dont les feuilles sont les courbes définies par $\Im\sqrt{\phi} = \text{const}$, et dont la mesure transverse est définie par $|\Im\sqrt{q}|$, et l'autre est le feuilletage vertical de q dont les feuilles sont des courbes définies par $\Re\sqrt{\phi} = \text{const}$, et dont la mesure transverse est définie par $|\Re\sqrt{q}|$. Les formes différentielles quadratiques holomorphes sur S constituent un espace vectoriel complexe que nous désignons par $Q(S)$. Hubbard et Masur ont défini une application Π de $Q(S)$ vers l'espace des feuilletages mesurés sur S telle que $\Pi(q)$ est le feuilletage horizontal de q si $q \neq 0$ et $\Pi(0) = \emptyset$, et ils ont prouvé que Π est un homéomorphisme. Puisqu'il y a un homéomorphisme canonique entre l'espace des feuilletages mesurés et l'espace des laminations mesurées (voir [8]), on peut considérer Π comme un homéomorphisme de $Q(S)$ à \mathcal{ML} .

Pour une surface S comme précédemment, soit $y = (Y, f)$ une paire consistant en une surface de Riemann de type fini Y et un homéomorphisme $f : S \rightarrow Y$. On peut alors considérer y comme un point de l'espace de Teichmüller $T(S)$. Soit α une courbe fermée simple essentielle sur S . Le module $\text{Mod}_y(\alpha)$ de α (pour y) est le supremum des modules des anneaux dont les axes sont homotopes à $f(\alpha)$ sur Y , où le module $\text{Mod}(A)$ d'un anneau A est égal à $\log R/2\pi$ si A est biholomorphe à un anneau rond $\{1 < |z| < R\}$ dans le plan complexe. On appelle l'inverse du module de α la *longueur extrême* de α pour y et la désigne par $\text{Ext}_y(\alpha)$. Kerckhoff [7] a montré que les longueurs extrêmes des courbes simples fermées s'étendent en une fonction continue définie sur \mathcal{ML} .

Dans [5], Gardiner et Masur ont défini une compactification de l'espace de Teichmüller analogue à celle de Thurston en utilisant la longueur extrême au lieu de la longueur hyperbolique. Ils y ont démontré également le résultat suivant (Theorem 5.1). Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux feuilletages mesurés sur une surface compacte S . On définit une fonction F sur l'espace de Teichmüller $T(S)$ de S par $F(y) = \text{Ext}_y(\mathcal{F})\text{Ext}_y(\mathcal{G})$. Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont transverses l'un à l'autre, l'infimum de F est positif et atteint sur une unique ligne géodésique $\ell_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$. Cette ligne consiste en les structures conformes sur S définies par deux feuilletages l'un desquels est dans la même classe projective que \mathcal{F} et l'autre est dans la même classe projective que \mathcal{G} . En dehors de $\ell_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$, la valeur de F est strictement supérieure à la valeur de $F|_{\ell_{\mathcal{F},\mathcal{G}}}$. S'il n'y a pas de feuilletages mesurés \mathcal{F}' et \mathcal{G}' transverses l'un à l'autre qui équivalent à \mathcal{F} et \mathcal{G} respectivement, il n'existe pas de valeur minimale de F .

En utilisant ce résultat, Gardiner et Masur ont obtenu les formules suivantes.

$$\text{Ext}_y(\alpha) = \sup_{\beta \in \mathcal{ML} - \{0\}} \frac{i(\alpha, \beta)^2}{\text{Ext}_y(\beta)}, \quad (2.3)$$

et

$$i(\alpha, F_\alpha(y)) = \text{Ext}_y(\alpha) = \text{Ext}_y(F_\alpha(y)). \quad (2.4)$$

On se rappelle que $F_\alpha(y)$ est la lamination géodésique mesurée associée au feuilletage mesuré horizontal de la forme différentielle quadratique de Hubbard-Masur sur y dont le feuilletage mesuré vertical correspond à α .

3. Le nombre d'intersection des distributions hölderiennes transverses

3.1. Distributions hölderiennes transverses

Soit (X, d) un espace métrique. Etant donné un compact K dans X et un nombre $\nu > 0$, on désigne par $\text{Höl}^\nu(X, K)$ l'espace des fonctions ν -hölderiennes sur X dont les supports sont contenus dans K . Posons $\text{Höl}(X) = \cup_{\nu>0, K \subset X} \text{Höl}^\nu(X, K)$. Une *distribution hölderienne* est une forme linéaire sur $\text{Höl}(X)$ qui est continue dans l'espace $\text{Höl}^\nu(X, K)$ pour tout compact K et tout $\nu > 0$.

Soit λ une lamination géodésique. Une *distribution (invariante) hölderienne transverse* pour λ assigne à tout arc rencontrant transversalement λ une distribution hölderienne définie sur celui-ci de sorte que toute isotopie hölderienne d'un arc transversal k à un autre k' préservant λ envoie la distribution hölderienne définie sur k à celle définie sur k' . Désignons par $\mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R})$ l'espace des distributions hölderiennes transverses pour la lamination géodésique λ .

3.2. L'espace tangent

Supposons qu'un réseau ferroviaire τ porte la lamination λ . Pour une branche b de τ et une distribution hölderienne transverse α , nous désignons par $\alpha(b)$ l'évaluation par α de la fonction constante 1_k sur une traverse k de la branche b . (Donc après isotopie, on peut supposer que λ rencontre k transversalement).

Théorème 3.1 (Bonahon [2, Thm. 19]). *Soient λ_0 une lamination géodésique mesurée sur S et λ une lamination géodésique qui contient le support de λ_0 . Alors, une distribution hölderienne transverse $\alpha \in \mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R})$ représente un vecteur tangent à λ_0 si et seulement si $\alpha(1_k) \geq 0$ pour tout arc k qui rencontre λ transversalement et qui est disjoint du support de λ_0 .*

Par conséquent, l'espace tangent de \mathcal{ML} à $\lambda_0 \in \mathcal{ML}$ s'identifie à l'espace des distributions hölderiennes transverses avec les propriétés du théorème 3.1.

3.3. Le nombre d'intersection

Soient λ_1 et λ_2 deux laminations géodésiques qui remplissent S . Prenons des réseaux ferroviaires τ_1 et τ_2 qui portent λ_1, λ_2 respectivement, et qui s'intersectent effectivement (voir la proposition 2.1). Fixons une traverse k_b^i pour chaque branche b de τ_i . Etant donnée une distribution hölderienne transverse $\alpha_i \in \mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R})$, nous définissons le *nombre d'intersection* entre α_1 et α_2 par

$$i(\alpha_1, \alpha_2) = \mathcal{I}_{\tau_1, \tau_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{p \in \tau_1 \cap \tau_2} \alpha_1(b(\tau_1, p)) \alpha_2(b(\tau_2, p)) \quad (3.1)$$

où $\alpha_i(b) = \alpha_i(1_{k_b})$ pour toute branche b de τ_i ($i = 1, 2$) et $b(\tau, p)$ désigne la branche d'un réseau ferroviaire τ contenant $p \in \tau$ qui n'est pas un aiguillage, comme précédemment.

3.4. Le lemme de la dérivée du nombre d'intersection

Le lemme suivant est apparu dans [9] pour le nombre d'intersection défini « analytiquement ». Nous allons le démontrer pour le nombre d'intersection défini géométriquement en utilisant des réseau ferroviaire comme ci-dessus.

Lemme 3.2 ([9, Prop. 4.3]). *Soient α et β deux laminations géodésiques mesurées qui remplissent S . Soient $\{\alpha_t\}_{t \in [0, t_0]}$ un chemin dans \mathcal{ML} avec $\alpha_0 = \alpha$ qui est dérivable à droite en $t = 0$, et $\dot{\alpha}_0$ sa dérivée à droite en $t = 0$. Alors, il existe un voisinage V de β dans \mathcal{ML} tel que*

$$i(\alpha_t, \beta') = i(\alpha, \beta') + t i(\dot{\alpha}_0, \beta') + \epsilon_{\beta'}(t) \quad (3.2)$$

quand $t \rightarrow 0$ pour tout $\beta' \in V$, où l'on peut prendre le terme erreur $\epsilon_{\beta'}(t)$ dans (3.2) uniforme par rapport à $\beta' \in V$ au sens que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\epsilon_{\beta'}(t)| \leq \epsilon t$$

pour tout $\beta' \in V$ et tout $t \in (0, \delta]$.

Démonstration. Soient τ_1, τ_2 des réseaux ferroviaires complets sur S qui portent α_t pour t suffisamment petit et β respectivement (voir §2.1). Nous pouvons supposer que τ_1 et τ_2 s'intersectent effectivement (proposition 2.1). Gardiner et Masur ont montré qu'il existe des voisinages

$V_1 \subset E_{\tau_1}$ de α et $V_2 \subset E_{\tau_2}$ de β tels que toutes $\alpha' \in \overline{V_1}$ et $\beta' \in \overline{V_2}$ remplissent S (voir [5]). Nous supposons de plus que l'adhérence de chaque V_i est compacte. Alors, il y a une constante $M > 0$ telle que

$$\beta'(b) \leq M$$

pour toute branche b de τ_2 et tout $\beta' \in \overline{V_2}$.

Fixons une traverse k_b de b pour toute branche b de τ . Choisissons une constante $\delta > 0$ telle que $\alpha_t \in V_1$ pour tout $t \in [0, \delta]$. Notons que $\alpha_t(1_{k_b})$, c'est-à-dire l'intégrale de la fonction 1_{k_b} par rapport à la mesure transverse de α_t , est égale à $\alpha_t(k_b)$. Désignons celle-ci par $\alpha_t(b)$. Alors, puisque $\dot{\alpha}_0(b) = \dot{\alpha}_0(1_{k_b})$, pour toute branche b de τ_1 , on a

$$\epsilon_b(t) := |\alpha_t(b) - \alpha(b) - t\dot{\alpha}_0(b)| = o(t)$$

quand $t \rightarrow 0$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} & |i(\alpha_t, \beta') - i(\alpha, \beta') - t i(\dot{\alpha}_0, \beta')| \\ &= \left| \sum_{p \in \tau_1 \cap \tau_2} (\alpha_t(b(\tau_1, p)) - \alpha(b(\tau_1, p)) - t\dot{\alpha}_0(b(\tau_1, p))) \beta'(b(\tau_2, p)) \right| \quad (\text{par (2.2)}) \\ &\leq \sum_{p \in \tau_1 \cap \tau_2} \epsilon_b(t) \beta'(b(\tau_2, p)) \quad (=:\epsilon_{\beta'}(t)) \\ &\leq M \left(\sum_{b:\text{branche du } \tau_1} \epsilon_b(t) \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

pour tout $\beta' \in \overline{V_2}$. Puisque (3.3) est indépendant de $\beta' \in \overline{V_2}$, le terme d'erreur $\epsilon_{\beta'}(t)$ a la propriété uniforme de l'énoncé. \square

On peut prouver la proposition suivante de la même manière.

Proposition 3.3. *Etant donnés deux chemins $\{\alpha_t\}_{t \in [0, t_0]}$ et $\{\beta_s\}_{s \in [0, s_0]}$ dans $\mathcal{ML}(S)$ qui sont dérivables à droite en $t = 0$ et $s = 0$ respectivement, si les supports de α_0 et β_0 remplissent S , on a*

$$i(\alpha_t, \beta_s) = i(\alpha_0, \beta_0) + t i(\dot{\alpha}_0, \beta_0) + s i(\alpha_0, \dot{\beta}_0) + O(t + s)$$

quand $t + s \rightarrow 0$, où $\dot{\alpha}_0$ et $\dot{\beta}_0$ sont les dérivées à droite en $t = 0$ et $s = 0$ respectivement.

4. La longueur extrémale et le nombre d'intersection

On va maintenant démontrer la formule (1.1) en utilisant notre définition du nombre d'intersection.

Démonstration de la formule (1.1). D'après (2.3) et (2.4), on obtient

$$\begin{aligned}
 \text{Ext}_y(\alpha_t) - \text{Ext}_y(\alpha_0) &\geq \frac{i(\alpha_t, F_{\alpha_0}(y))^2 - i(\alpha_0, F_{\alpha_0}(y))^2}{\text{Ext}_y(\alpha_0)} \\
 &= \frac{(i(\alpha_0, F_{\alpha_0}(y)) + t i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_0}(y)) + o(t))^2 - i(\alpha_0, F_{\alpha_0}(y))^2}{\text{Ext}_y(\alpha_0)} \\
 &\geq \frac{2t i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_0}(y)) i(\alpha_0, F_{\alpha_0}(y))}{\text{Ext}_y(\alpha_0)} + o(t) \\
 &= 2t i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_0}(y)) + o(t)
 \end{aligned}$$

quand $t \rightarrow 0$. L'inégalité inverse est également obtenue de la même manière. En effet,

$$\begin{aligned}
 \text{Ext}_y(\alpha_t) &= \frac{i(\alpha_t, F_{\alpha_t}(y))^2}{\text{Ext}_y(\alpha_t)} = \frac{(i(\alpha_0, F_{\alpha_t}(y)) + t i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_t}(y)) + o(t))^2}{\text{Ext}_y(\alpha_t)} \\
 &\leq \text{Ext}_y(\alpha_0) + 2t \frac{i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_t}(y)) i(\alpha_0, F_{\alpha_t}(y))}{\text{Ext}_y(\alpha_t)} + o(t) \quad (\text{par (2.3) et (2.4)}) \\
 &\leq \text{Ext}_y(\alpha_0) + 2t i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_0}(y)) \frac{\text{Ext}_y^{1/2}(\alpha_0)}{\text{Ext}_y^{1/2}(\alpha_t)} + o(t) \quad (\text{par (2.3)}) \\
 &= \text{Ext}_y(\alpha_0) + 2t i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_t}(y)) + 2t i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_t}(y)) \left(1 - \frac{\text{Ext}_y^{1/2}(\alpha_0)}{\text{Ext}_y^{1/2}(\alpha_t)}\right) + o(t) \\
 &= \text{Ext}_y(\alpha_0) + 2t i(\dot{\alpha}_0, F_{\alpha_t}(y)) + o(t)
 \end{aligned}$$

quand $t \rightarrow 0$, par continuité de la fonction longueur extrémale et du nombre d'intersection. \square

5. La boule unité

Soient y un point de $T(S)$ et \mathcal{B}_y la boule unité fermée pour la longueur extrémale, c'est-à-dire

$$\mathcal{B}_y = \{\alpha \in \mathcal{ML} \mid \text{Ext}_y(\alpha) \leq 1\}.$$

Proposition 5.1. *Le bord $\partial\mathcal{B}_y$ est une variété de classe C^1 ; ce qui veut dire que pour tout $\alpha \in \partial\mathcal{B}_y$ et tout réseau ferroviaire τ compatible avec α , $\text{Int}(E_\tau) \cap \partial\mathcal{B}_y$ est une variété de classe C^1 dans V_τ .*

Démonstration. Fixons un réseau ferroviaire τ' compatible avec $F_\alpha(y)$ qui rencontre τ effectivement. Les formules (1.1) et (3.1) impliquent que la fonction extrémale est de classe C^1 dans le système de coordonnées E_τ puisque $F_\alpha(y)$ varie continûment par rapport à $\alpha \in \mathcal{ML}$. De l'égalité

$$\frac{d}{dt} \text{Ext}_y((1+t)^2\alpha) |_{t=0} = 2i(\alpha, F_\alpha) = 2\text{Ext}_y(\alpha) \neq 0,$$

l'énoncé s'ensuit en utilisant le théorème des fonctions implicites. □

Proposition 5.2. *La boule unité \mathcal{B}_y est strictement convexe en tout $\alpha \in \partial\mathcal{B}_y$ au sens que pour un réseau ferroviaire τ compatible avec α , il existe un hyperplan H dans V_τ tel que $H \cap (\mathcal{B}_y \cap E_\tau) = \{\alpha\}$.*

Démonstration. Fixons un réseau ferroviaire τ' qui est compatible avec $F_\alpha(y)$ et rencontre τ effectivement. Définissons un hyperplan H dans V_τ par

$$H = \{\mu \in V_\tau \mid \mathcal{I}_{\tau, \tau'}(\mu, F_\alpha(y)) = 1\}.$$

Notons que la proposition 5.1 implique qu'on peut identifier l'hyperplan H avec l'espace tangent de $\partial\mathcal{B}_y$ en α (dans les coordonnées de E_τ). Pour $\beta \in \mathcal{B}_y \cap E_\tau \subset V_\tau$, on trouve que

$$\mathcal{I}_{\tau, \tau'}(\beta, F_\alpha(y)) = i(\beta, F_\alpha(y)) \leq \text{Ext}_y(\beta)^{1/2} \text{Ext}_y(F_\alpha(y))^{1/2} \leq 1$$

d'après (2.3). Si $\mathcal{I}_{\tau, \tau'}(\beta, F_\alpha(y)) = 1$, on aura $\beta = \alpha$ par le critère de Gardiner et Masur dans [5]. Donc il s'ensuit que $\mathcal{B}_y \cap E_\tau$ est strictement convexe en α dans V_τ . □

Remarque 5.3. Il est connu que la boule unité $\{\lambda \in \mathcal{ML} \mid \ell_y(\lambda) \leq 1\}$ par rapport à la longueur hyperbolique est également convexe localement (voir Mirzakhani [7]). On peut considérer la proposition 5.2 comme un homologue dans la géométrie des longueurs extrémales de l'observation de Mirzakhani dans [7].

6. Coordonnées de décalage dans la géométrie des longueurs extrémales

6.1. La théorie de Bonahon

Soient $T(S)$ l'espace de Teichmüller de S , et λ une lamination géodésique complète. Pour $y \in T(S)$, Bonahon [1] a défini une distribution hœlderienne transverse $\sigma_y \in \mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R})$ telle que

$$\ell_y(\alpha) = \tau(\alpha, \sigma_y) \tag{6.1}$$

pour $\alpha \in \mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R})$ où $\tau(\cdot, \cdot)$ est la forme symplectique de Thurston sur $\mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R})$. Il a aussi montré que l'application

$$T(S) \ni y \mapsto \sigma_y \in \mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R}) \tag{6.2}$$

est un plongement d'image

$$\{\sigma \in \mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R}) \mid \tau(\alpha, \sigma) > 0 \text{ pour toute mesure non-nulle } \alpha \in \mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R})\} \tag{6.3}$$

(voir [1, Thm. 20]).

6.2. Coordonnées associés à la géométrie des longueurs extrémales

Dans cette section, nous allons proposer un candidat d'un plongement correspondant à (6.2) dans la géométrie de longueur extrémale.

Soit τ un réseau ferroviaire complet générique sur S . Soit α_0 une lamination géodésique mesurée portée par τ . Supposons que α_0 soit *maximale* au sens que pour une lamination géodésique mesurée β , $|\alpha_0| \subset |\beta|$ implique que $|\alpha_0| = |\beta|$.

Pour $y \in T(S)$, on considère une forme linéaire

$$V_\tau \ni \beta \mapsto i(\beta, F_{\alpha_0}(y)) \in \mathbb{R} \tag{6.4}$$

sur V_τ . Rappelons que la forme symplectique de Thurston a été définie sur V_τ , (voir [12, §3.2]), et Bonahon l'a étendu à $\mathcal{H}(\lambda, \mathbb{R})$. On utilise le même symbole τ pour désigner la forme définie sur V_τ . Puisque la forme symplectique de Thurston est non-dégénérée, il y a un point $\Sigma_{\alpha_0, \tau}(y) \in V_\tau$ unique tel que

$$i(\beta, F_{\alpha_0}(y)) = \tau(\beta, \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y)) \tag{6.5}$$

pour tout $\beta \in V_\tau$ (voir [12, Thm. 3.2.4]).

En comparant cette formule avec (6.1), et en considérant (1.1) et (1.3), on peut voir que $\Sigma_{\alpha_0, \tau}(y)$ est un homologue de la distribution hölderienne transverse σ_y dans la géométrie des longueurs extrémales. De plus, nous obtenons le théorème de plongement suivant (à comparer avec (6.3)) :

Théorème 6.1. *Soient τ un réseau ferroviaire complet, et $\alpha_0 \in E_\tau$ une lamination géodésique mesurée maximale. Alors, l'application*

$$T(S) \ni y \mapsto \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y) \in V_\tau \quad (6.6)$$

est un plongement d'image

$$\left\{ \sigma \in V_\tau \mid \begin{array}{l} \tau(\alpha, \sigma) > 0 \text{ pour toute mesure non-nulle } \alpha \text{ dans } E_\tau \\ \text{satisfaisant } |\alpha| \subset |\alpha_0| \end{array} \right\}. \quad (6.7)$$

Démonstration. Désignons par \mathcal{T}' l'image de l'application (6.6). Soit \mathcal{T}_τ le sous-ensemble de V_τ défini par (6.7). Puisque $F_{\alpha_0}(y)$ correspond au feuilletage horizontal et α_0 au feuilletage vertical, on a

$$\tau(\alpha, \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y)) = i(\alpha, F_{\alpha_0}(y)) > 0$$

pour toute mesure $\alpha \in E_\tau$ avec $|\alpha| \subset |\alpha_0|$, ce qui implique $\Sigma_{\alpha_0, \tau}(y) \in \mathcal{T}_\tau$.

On va montrer que l'application (6.6) est injective. Soient y_1 et y_2 deux points dans $T(S)$. Supposons que $\Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_1) = \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_2)$. On sait qu'il existe une famille finie $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ des courbes simples fermées qui satisfait la condition suivante : pour $F_1, F_2 \in \mathcal{ML}$ quelconques, les égalités

$$i(\gamma_i, F_1) = i(\gamma_i, F_2) \quad (i = 1, \dots, N)$$

implique $F_1 = F_2$ (voir [4, Exposé 6] et son appendice). Puisque l'ensemble des feuilletages stables des homéomorphismes pseudo-Anosov sur S est dense dans \mathcal{ML} , il y a un homéomorphisme ϕ sur S tel que $\phi(\gamma_i) \in \text{Int}(E_\tau)$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Par définition, on a

$$\tau(\phi(\gamma_i), \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_j)) = i(\phi(\gamma_i), F_{\alpha_0}(y_j)) = i(\gamma_i, \phi^{-1}(F_{\alpha_0}(y_j)))$$

pour tout $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, 2$. On obtient alors

$$\begin{aligned} i(\gamma_i, \phi^{-1}(F_{\alpha_0}(y_1))) &= \tau(\phi(\gamma_i), \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_1)) \\ &= \tau(\phi(\gamma_i), \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_2)) = i(\gamma_i, \phi^{-1}(F_{\alpha_0}(y_2))), \end{aligned}$$

ce qui implique $F_{\alpha_0}(y_1) = F_{\alpha_0}(y_2)$. Alors, par le théorème de Hubbard-Masur dans [6] on a $y_1 = y_2$.

Finalement, on va démontrer que l'application (6.6) est surjective. Puisque $T(S)$ et V_τ ont la même dimension, l'image \mathcal{T}' est ouverte dans

V_τ . On va montrer que l'image \mathcal{T}' est aussi fermée dans \mathcal{T}_τ . Supposons le contraire, *i.e.* que $\partial\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}_\tau \neq \emptyset$, et choisissons un point $\sigma_0 \in \partial\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}_\tau$. On a $\sigma_0 \neq 0$ par définition. Soit $(y_n)_{n=1}^\infty$ une suite dans $T(S)$ telle que $(\Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_n))_n$ converge vers σ_0 dans V_τ .

De la même manière que dans la démonstration de l'injectivité, nous prenons une famille des courbes simples fermées $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ dans l'intérieur du cône E_τ de sorte que l'application

$$\mathcal{ML} \ni F \mapsto (i(\gamma_1, F), \dots, i(\gamma_N, F)) \in \mathbb{R}^N$$

est injective. De plus, quitte à y ajouter un nombre fini de courbes simples fermées si nécessaire, nous pouvons aussi supposer que V_τ est engendré comme un espace linéaire par $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$. Puisque $\tau(\gamma_i, \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_n))$ tend vers $\tau(\gamma_i, \sigma_0)$ et $\tau(\gamma_i, \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_n)) = i(\gamma_i, F_{\alpha_0}(y_n))$, il y a une constante $c_1 > 0$ telle que l'inégalité

$$i(\gamma_i, F_{\alpha_0}(y_n)) \leq c_1$$

tient pour tout $i = 1, \dots, N$ et tout n suffisamment grand. On peut alors choisir une sous-suite $(y_{n_j})_{j=1}^\infty$ et une lamination géodésique mesurée F_0 telles que $F_{\alpha_0}(y_n) \rightarrow F_0$ (voir [4, Exposé 6]).

On va montrer $F_0 \neq 0$. En effet, si F_0 était nulle, on aurait

$$\begin{aligned} \tau(\gamma_i, \sigma_0) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \tau(\gamma_i, \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_{n_j})) = \lim_{j \rightarrow \infty} i(\gamma_i, F_{\alpha_0}(y_{n_j})) \\ &= i(\gamma_i, F_0) = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ceci impliquerait $\sigma_0 = 0$, puisque $\{\gamma_i\}_{i=1}^N$ engendre V_τ , ce qui est une contradiction.

Si F_0 et α_0 satisfont la condition $i(\beta, F_0) + i(\beta, \alpha_0) > 0$ pour toute lamination géodésique mesurée non-nulle β , alors il existe un point $y_0 \in T(S)$ tel que $F_{\alpha_0}(y_0) = F_0$ (voir [5] et [6]). Comme dans (6.8), on obtient l'égalité

$$\tau(\gamma_i, \sigma_0) = i(\gamma_i, F_{\alpha_0}(y_0)) = \tau(\gamma_i, \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_0))$$

pour $i = 1, \dots, N$. On en déduit $\sigma_0 = \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_0)$, ce qui est une contradiction puisque $\sigma_0 \in \partial\mathcal{T}'$.

Cela signifie qu'il doit exister une lamination géodésique mesurée β telle que $i(\alpha_0, \beta) = i(\beta, F_0) = 0$. Puisque α_0 est maximale, le support de β doit être contenu dans $|\alpha_0|$. On a aussi

$$\tau(\beta, \sigma_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\beta, \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} i(\beta, F_{\alpha_0}(y_n)) = i(\beta, F_0) = 0.$$

Donc on déduit $\sigma_0 \notin \mathcal{T}_\tau$, ce qui est également une contradiction. \square

6.3. Géodésiques de Teichmüller vues dans les coordonnées

En fixant un point de base $y \in T(S)$, nous désignons par $\{y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ la géodésique de Teichmüller défini par la forme différentielle de Hubbard-Masur pour α_0 sur y (qui est paramétrée par la longueur). D'après la définition des géodésiques de Teichmüller, on a $\text{Ext}_{y_t}(\alpha_0) = e^{-2t} \text{Ext}_y(\alpha_0)$ et on sait que $F_{\alpha_0}(y_t)$ équivaut projectivement à $F_{\alpha_0}(y)$. Donc on obtient $F_{\alpha_0}(y_t) = e^{-t} F_{\alpha_0}(y)$ (voir (2.4)). Alors l'égalité (6.5) implique que

$$\Sigma_{\alpha_0, \tau}(y_t) = e^{-t} \Sigma_{\alpha_0, \tau}(y) \quad (6.9)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Celle-ci suggère une similitude entre les géodésiques de Teichmüller et les lignes d'étirement définies par Thurston (voir [14]).

Références

- [1] F. BONAHOON – « Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces and Thurston's symplectic form », *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **5** (1996), no. 2, p. 233–297.
- [2] ———, « Geodesic laminations with transverse Hölder distributions », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **30** (1997), no. 2, p. 205–240.
- [3] ———, « Geodesic laminations on surfaces », in *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, Contemporary Mathematics, vol. 269, American Mathematical Society, 2001, p. 1–37.
- [4] A. FATHI, F. LAUDENBACH & V. POÉNARU – *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66, Société Mathématique de France, Paris, 1979, Séminaire Orsay, With an English summary.
- [5] F. P. GARDINER & H. MASUR – « Extremal length geometry of Teichmüller space », *Complex Variables Theory Appl.* **16** (1991), no. 2-3, p. 209–237.
- [6] J. HUBBARD & H. MASUR – « Quadratic differentials and foliations », *Acta Math.* **142** (1979), no. 3-4, p. 221–274.
- [7] S. P. KERCKHOFF – « The asymptotic geometry of Teichmüller space », *Topology* **19** (1980), no. 1, p. 23–41.
- [8] G. LEVITT – « Foliations and laminations on hyperbolic surfaces », *Topology* **22** (1983), no. 2, p. 119–135.

- [9] H. MIYACHI – « A differential formula for extremal length », in *In the tradition of Ahlfors-Bers. VI*, Contemporary Mathematics, vol. 590, American Mathematical Society, 2013, p. 137–152.
- [10] A. PAPADOPOULOS – « Réseaux ferroviaires, difféomorphismes pseudo-anosov et automorphismes sympléctique de l’homologie d’une surface », *Publ. Math. Orsay* **83-03** (1983), 73 pages.
- [11] A. PAPADOPOULOS & W. SU – « On the Finsler structure of Teichmüller’s metric and Thurston’s metric », *Expo. Math.* **33** (2015), no. 1, p. 30–47.
- [12] R. C. PENNER & J. L. HARER – *Combinatorics of train tracks*, Annals of Mathematics Studies, vol. 125, Princeton University Press, 1992.
- [13] W. P. THURSTON – « The geometry and topology of three-manifolds », available at <http://library.msri.org/books/gt3m/>.
- [14] ———, « Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces », <https://arxiv.org/abs/math/9801039>, 1998.

HIDEKI MIYACHI
 Department of Mathematics, Graduate
 School of Science, Osaka University,
 Machikaneyama 1-1, Toyonaka, Osaka
 560-0043, Japan
miyachi@math.sci.osaka-u.ac.jp

KEN’ICHI OHSHIKA
 Department of Mathematics, Graduate
 School of Science, Osaka University,
 Machikaneyama 1-1, Toyonaka, Osaka
 560-0043, Japan
ohshika@math.sci.osaka-u.ac.jp