ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

LAURENT SCHWARTZ

Le théorème des trois opérateurs

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 143-164
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_143_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.143-164

LE THEOREME DES TROIS OPERATEURS.

par Laurent SCHWARTZ..

INTRODUCTION ET RESUME.

Le résultat fondamental de cet article est le théorème (V.1): Si E, F, G, H sont de espaces de Banach, F réflexif séparable, G réflexif, H ayant la propriété de Radon-Nikodym, si u: E→ F, v: F→ G, w: G→ H, sont des applications linéaires continues, u et v 0-radonifiantes, w 1-sommante, et si L est une semi-martingale cylindrique à valeurs dans E, i.e. une application linéaire continue de E' dans l'espace des semi-martingales scalaires, alors $wvu(L) = L \circ {}^t u \circ {}^t v \circ {}^t w$ se réalise comme une semi-martingale vraie à valeurs dan H. Il a été démontré par Süleyman Üstünel (1) en 1980 dans le cas particulier où E, F, G, H sont hilbertiens, et u, v, w de Hilbert-Schmidt. J'ai trouvé un théorème plus général en 1981; j'ai renoncé à le publier parce que la démonstration était trop compliquée. Peu de temps avant sa mort, Albert Badrikian écrivit avec Ustünel une nouvelle démonstration, bien plus simple que la mienne et avec des idées nouvelles, de mon résultat de 1981, mais avec des hypothèses nettement trop fortes. En étudiant leurs idées, j'ai trouvé un théorème cette fois-ci sans les hypothèses fortes, et améliorant même mon résultat de 1981, encore avec une démonstration complètement différente et plus simple. Il fut publié dans le séminaire de Probabilités [2]. J'ai donc décidé d'exposer ce théorème dans le présent Colloque en hommage à Albert Badrikian, pour lequel j'ai toujours eu beaucoup d'estime et d'amitié. Malheureusement la démonstration du séminaire [2] contient un erreur, qui se répercute jusqu'au bout, de sorte que l'énoncé final est faux; j'ai écrit un rectificatif, qui sera publié dans le prochain Séminaire de Probabilités: ce rectificatif se borne, en 2 pages, à dire quelles substitutions doivent être faites dans les démonstrations du séminaire [2] pour que le théorème final devienne exact. Ce que je fais ici est un nouvel exposé de l'ensemble; cette fois c'est juste, du moins je l'espère, le résultat est exactement mon théorème non publié de 1981, mais les démonstrations sont meilleures que toutes les démonstrations antérieures, justes ou fausses, tout est bien qui finit bien. Par rapport à [2] on doit ajouter les conditions: F réflexif séparable et G réflexif. Les résultats démontrés ici sont en relation avec ceux de Bernard Maurey [1] sur les applications p-G sommantes.

§I. PRELIMINAIRES

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On appelle $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P; F)$ l'espace des P-classes d'applications P-mesurables de Ω dans un espace de Banach F, muni de sa tribu borélienne. On ne mentionnera plus, sauf cas exceptionnels, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, parce que ce sera toujours le même. Si $F=\mathbb{R}$, on l'omettra. Alors $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ s'écrira simplement L^0. En outre, on ne parlera plus des P-classes d'applications, mais simplement des applications, étant entendu qu'on identifiera deux applications pp. égales. On met alors sur $L^0(F)$ la topologie de la convergence en probabilité, relativement à sa norme. Elle n'est pas localement convexe, mais définie par les jauges J_α, $0 \leqslant \alpha < 1$; pour $X \in L^0(F)$,

$$(\mathrm{I}.1)\quad J_\alpha(X) = \operatorname{Inf}\{ M>0; P\{ |X|_F > M \} \leqslant \alpha \}, \text{ où } |X|_F(\omega)| = |X(\omega)|_F .$$

Il est donc équivalent de dire que $J_\alpha(X) \leqslant M$, ou que $|X|_F \leqslant M$ sauf sur un ensemble de Ω de P- mesure $\leqslant \alpha$. Pour $\beta \geqslant \alpha$, $J_\beta \leqslant J_\alpha$; X_i converge vers 0 en probabilité, ssi ,pour tout α, $J_\alpha(X_i)$ converge vers 0. L'espace $L^0(F)$ est métrisable et complet, c'est un "Fréchet non localement convexe".

Supposons F séparable, et muni de sa tribu borélienne. On appelle variable aléatoire X à valeurs dans F une application de Ω dans F, P-mesurable; $X \in L^0(F)$. Alors $\eta \mapsto \langle X, \eta\rangle_{F, F'}$ (où le deuxième membre est la fonction $\omega \mapsto \langle X(\omega), \eta\rangle_{F, F'}$) est une application linéaire de F' dans l'espace L^0 des fonctions réelles P-mesurables. Cette application est continue. Supposons en effet que des η_i convergent vers 0 dans F'; posons $J_\alpha(X)= M$; pour i assez grand, $|\eta_i|_{F'} \leqslant \varepsilon/M$, de sorte que $J_\alpha(\langle X, \eta_i\rangle_{F, F'}) \leqslant \varepsilon$, et ceci quels que soient ε et α, donc $\langle X, \eta_i\rangle_{F, F'}$ tend vers 0 en probabilité. Donc un élément de $L^0(F)$. définit un élément de $\mathcal{L}(F'; L^0)$. On généralisera ainsi:

On appelle variable aléatoire fictive ou virtuelle ou cylindrique à valeurs dans le Banach E une application linéaire continue L de E' dans L^0, $L \in \mathcal{L}(E';L^0)$; pour tout $\xi \in E'$, $L(\xi)$ est une fonction réelle P-mesurable, $L(\xi) \in L^0$, mais elle ne provient pas d'une application mesurable de Ω dans E.

Nous aurons besoin de la notion d'application linéaire continue u d'un Banach E dans un Banach F, telle que la transposée ${}^t u$ soit 0-décomposante. Mais on sait que, si F est séparable, ceci est vrai ssi u est 0-radonifiante ([2]); nous dirons "u est 0-radonifiante", mais nous entendrons par là que "${}^t u$ est 0-décomposante".

Une application linéaire continue u d'un Banach E dans un Banach F séparable, $u \in \mathcal{L}(E; F)$, est dite 0-radonifiante si, quelle que soit la variable aléatoire cylindrique $L \in \mathcal{L}(E'; L^0)$, l'application $L \circ {}^t u \in \mathcal{L}(F'; L^0)$, $L \circ {}^t u$: $F' \to E' \to L^0$, est une variable aléatoire vraie $\Omega \to F$, $L \circ {}^t u \in L^0(F)$, F muni de sa tribu borélienne. Si L est déjà une variable aléatoire, $L \in L^0(E)$, E séparable muni de sa tribu borélienne, $L \circ {}^t u$ est la variable aléatoire $u \circ L$, $\Omega \to E \to F$; on abrégera donc toujours, quelle que soit L, $L \circ {}^t u$ par $u(L)$. Si u est 0-radonifiante, l'application linéaire $L \to u(L)$ de $\mathcal{L}(E'; L^0)$ dans $L^0(F)$ est continue par le théorème du graphe fermé. Ceci s'exprime par:

Quel que soit α, $0 \leqslant \alpha < 1$, il existe β, $0 \leqslant \beta < 1$, et $C \geqslant 0$ fini tels que, quelle que soit $L \in \mathcal{L}(E'; L^0)$,

$$\text{(I.2)} \quad J_\beta(u(L)) \leqslant C \operatorname{Sup}_{\xi \in E',\ |\xi|_{E'} \leqslant 1} J_\alpha(L(\xi)).$$

C et β ne dépendent que de α, E, F, u, non de Ω, P, L.

§ II. PROCESSUS ET PROCESSUS CYLINDRIQUES.

Soit K un compact séparable; nous aurons besoin d'un exemple pour lequel il n'est pas métrisable; $t \in K$ s'appellera un temps. Une fois pour toutes, nous choisirons un sous-ensemble dénombrable dense K' de K. Comme toujours, C(K) est l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur K, avec la norme

(II.1) $\| f \|_{C(K)} = \mathrm{Sup}\,\{|f_t|,\ t\in K\} = \mathrm{Sup}\,\{|f_{t'}|,\ t'\in K'\}$.

On sait que C(K) est séparable ssi K est métrisable. Mais le dual M(K)=C'(K), espace des mesures de Radon sur K, est toujours séparable pour la topologie $*$-faible $\sigma(M,C)$, car les mesures de Dirac $\delta_{t'}$, $t'\in K'$, y forment un ensemble total. On munit traditionnellement C(K) de la tribu τ la moins fine pour laquelle toutes les fonctions réelles $f\mapsto f_t$ sur C(K), $t\in K$, soient mesurables. Alors $f\mapsto |f_t|$ est aussi mesurable, donc la fonction norme

$f\mapsto \| f \|_{C(K)} = \mathrm{Sup}\,\{ |f_{t'}|,\ t'\in K' \}$, est mesurable. La tribu de C(K) est sa tribu borélienne si K est métrisable. L'espace $L^0(C(K))$ est l'espace des applications X de Ω dans C(K) P-mesurables pour la tribu et la norme ci-dessus de C(K). Je ne crois pas que les mesures de Radon, formes linéaires continues sur C(K), soient nécessairement mesurables pour sa tribu τ; $\mathcal{C}$ sera la tribu plus grande engendrée par le dual, sans doute $\tau \neq \mathcal{C}$. Nous nous servirons toujours ici de τ. Si K est métrisable, C(K) est polonais, toute suite de fonctions sur C(K) qui sépare les points engendre sa tribu borélienne, donc τ et $\mathcal{C}$ sont égales à la tribu borélienne. Soit F un Banach réflexif séparable. L'espace $C(K;\sigma(F, F'))$ est l'espace des applications faiblement continues de K dans F. On le munira de la tribu τ définie de la même manière que pour C(K), la moins fine pour laquelle les applications $f\mapsto f_t$ de $C(K;\sigma(F, F'))$ dans F soient mesurables. (Rappelons que les tribus borélienne et faiblement borélienne de F coïncident). Alors les fonctions réelles $f \mapsto |f_t|_F$,pour tout $t\in K$, sont mesurables. L'espace $C(K;\sigma(F, F'))$ est muni d'une topologie naturelle, pour laquelle des f_i convergent vers 0 ssi ,pour tout $\eta \in F'$, les $< f_i , \eta >_{F, F'}$ convergent vers 0 dans C(K). Mais on ne retient pas cette topologie, et on lui met une norme qui en fait un Banach; nous prendrons

$$\|f\|_{C(K;\ \sigma(F,\ F'))} = \mathrm{Sup}\,\{ |X_t|_F ,\ t\in K\} = \mathrm{Sup}\,\{ |X_{t'}|_F ,\ t'\in K' \} .$$

(parce que la norme sur F est semi-continue inférieurement pour la topologie faible); cette fonction réelle sur $C(K;\sigma(F, F'))$ est aussi τ- mesurable. On peut alors définir la topologie de $L^0(C(K;\sigma(F,F')))$ par les jauges J_α définies à (I.1)) où $C(K)$ est remplacé par $C(K;\sigma(F,F'))$, muni de cette norme.

On va remplacer les variables aléatoires vraies ou cylindriques par des processus vrais ou cylindriques. K jouera le rôle d'un intervalle de temps, d'où le nom de processus.

Soient F un Banach séparable, K un compact séparable. Un processus faiblement continu à valeurs dans F est une application X P-mesurable de Ω dans $C(K;\sigma(F,F'))$.

Un processus cylindrique continu à valeurs dans E est une application linéaire continue L de E' dans $L^0(C(K))$, $L=\mathcal{L}(E';L^0(C(K))$. Un processus X est un processus cylindrique, en posant $L(\eta)=\langle X,\eta\rangle_{F,F'}$ pour $\eta\in F'$.

Une variable aléatoire est un processus si K est réduit à un point.

On voit l'intérêt essentiel de la tribu τ plutôt que de la tribu $\mathcal{C}$: quand on dit que X est un processus continu sur $\Omega\times K$, on veut dire que, pour (presque) tout ω de Ω, $X(\omega)$ est une fonction continue sur K, et que X est adapté (pour une seule tribu $\mathcal{F}$ pour simplifier), c. à d. que X_t est $\mathcal{F}$-mesurable; cela veut exactement dire que X est élément de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P; C(K))$, pour la tribu τ sur $C(K)$. On a un besoin absolu de considérer $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P; C(K))$, pour les théorème de radonification qui seront donnés plus loin, et les inégalités (I.2). Par ailleurs, en probabilités, on parle couramment de processus continus L^p, c. à d. tels que $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; C(K))$. D'ailleurs les processus L^p pourraient, dans plusieurs des résultats qui suivent, remplacer les processus L^0, avec utilisation de la norme p-radonifiante $\Pi_p(u)$.

Théorème (II.2).

Soient E, F, des Banach, F réflexif séparable, K un compact séparable, u une application 0-radonifiante de E dans F. Si $L: E'\to L^0(C(K))$ est un processus cylindrique continu à valeurs dans E, $L\in\mathcal{L}(E';L^0(C(K)))$, alors

$u(L) = L \circ {}^t u \in \mathcal{L}(F'; L^0(C(K)))$ est un vrai processus faiblement continu à valeurs dans F, $u(L) \in L^0(C(K; \sigma(F, F')))$, et on a les inégalités (I.2), avec les mêmes constantes: C et β dépendent de α, E, F, u, non de K, Ω, P, L.

Démonstration.

Soit $t \in K$. Alors L_t, définie par $L_t(\xi)(\omega) = (L(\xi)(\omega))_t \in \mathbb{R}$, est une application linéaire continue de E' dans L^0, $L_t \in \mathcal{L}(E'; L^0)$. Par définition des applications 0-radonifiantes, $u(L_t) \in L^0(F)$, et on a les inégalités (I.2), où L est remplacée par L_t. Plus généralement, soit T un "temps d'arrêt", c. à d. une variable aléatoire étagée à valeurs dans K. On définit normalement L_T par $L_T(\xi)(\omega) = ((L(\xi)(\omega)))_{T(\omega)} \in \mathbb{R}$, c'est une application linéaire continue de E' dans L^0 : $L_T \in \mathcal{L}(E'; L^0)$. Ici encore, comme u est 0-radonifiante, $u(L_T) \in L^0(F)$, et on a les inégalités (I.2), où L est remplacée par L_T.

Soit A un ensemble fini de temps d'arrêt; il existe un temps d'arrêt T_A tel que $|u(L_{T_A})|_F = \mathrm{Sup}_{T \in A} |u(L_T)|_F$. Lorsque A varie, les $|u(L_{T_A})|_F$ forment un ordonné filtrant croissant de variables aléatoires ≥ 0. Elles ont donc un SUP latticiel M, variable aléatoire réelle positive, finie ou non, qui est aussi la limite simple d'une suite croissante d'entre eux, $(|u(L_{T_n})|_F)_{n \in \mathbb{N}}$. C'est aussi le SUP latticiel des $|u(L_t)|_F$. Alors les inégalités

$$\text{(II.3)} \quad J_\beta(u(L_{T_n})) \leq C \,\mathrm{Sup}_{\xi \in E',\, |\xi|_{E'} \leq 1} J_\alpha(L_{T_n}(\xi)) \leq$$

$$C \,\mathrm{Sup}_{\xi \in E',\, |\xi|_{E'} \leq 1} J_\alpha(L(\xi)) < +\infty$$

puisque L est continue. Ceci entraîne par Fatou:

(II.4) $J_\beta(M) \leqslant C \operatorname{Sup}_{\xi \in E',\ |\xi|_{E'} \leqslant 1} J_\alpha(L(\xi)) < +\infty$.

En particulier, M est ps. finie. Pour tout $t' \in K'$, nous ferons choix d'une fonction $u(L_{t'}) = X_{t'} \in L^0(F)$ dans sa P-classe, telle que, pour tous t', ω, $|X_{t'}(\omega)|_F \leqslant M(\omega)$ fini, ou, pour tout $\eta \in F'$, $|\langle X_{t'}(\omega), \eta \rangle| \leqslant M(\omega) |\eta|_{F'}$. Pour ω fixé, l'ensemble des fonctions $X_{t'}(\omega)$ sur F' est donc équicontinu. Comme F est réflexif séparable, son dual F' l'est aussi. Soit D' un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel dénombrable dense dans F'. D'après la définition de L, pour tout $\xi \in E'$, pour presque tout ω,. la fonction $t' \mapsto (L(\xi))_{t'}(\omega)$ est restriction à K' d'une fonction continue réelle sur K, donc, pour presque tout ω, pour tout $\eta' \in D'$, la fonction réelle $t' \mapsto \langle X_{t'}(\omega), \eta' \rangle_{F, F'}$ l'est aussi; appelons $t \mapsto X_t(\omega, \eta')$) son prolongement continu à K; $|X_t(\omega, \eta')| \leqslant M(\omega) |\eta'|_{F'}$ Pour ω, $t \in K$ fixés, lorsque t' tend vers t, les $X_{t'}(\omega, .)$ équicontinues convergent simplement vers une limite sur le sous-ensemble dense D' de F', donc, par Ascoli, sur F' tout entier, autrement dit $\langle X_{t'}(\omega), \eta \rangle_{F, F'}$ a une limite, que nous écrirons $X_t(\omega, \eta)$, et $|X_t(\omega, \eta)| \leqslant M(\omega) |\eta|_{F'}$ Toujours par Ascoli, $X_t(\omega, .)$ est continue sur F', et, étant $\mathbb{Q}$-linéaire sur D', est $\mathbb{R}$-linéaire sur F', ou $X_t(\omega, \eta) = \langle X_t(\omega), \eta \rangle_{F, F'}$, avec $X_t(\omega) \in F$, et $|X_t(\omega)|_F \leqslant M(\omega)$. Donc nous avons démontré que $X(\omega) = u(L)(\omega)$ est une application de K dans F, faiblement continue; pour tout ω, $u(L)(\omega) \in C(K; \sigma(F, F'))$. Par ailleurs, $u(L)_t$ appartient à la classe $u(L)_t$ définie au début de la démonstration, donc est P-mesurable à valeurs dans F, donc, par définition de la tribu de $C(K; \sigma(F, F'))$, $u(L) \in L^0(C(K; \sigma(F, F')))$. Enfin les inégalités $|u(L)_t(\omega)|_F \leqslant M(\omega)$ montrent que

(II.5) $\|u(L)\|_{C(K;\ \sigma(F, F'))} \leqslant M$, ou $\|u(L)(\omega)\|_{C(K;\ \sigma(F, F'))} \leqslant M(\omega)$,

d'où les inégalités (I.2) compte tenu de (II.4). ♠

§ III. PROCESSUS ADAPTÉS CADLAGS sur $I \times \Omega$, I intervalle compact de

$[0,+\infty]$.

Nous avons employé un langage probabiliste dans un cas qui ne semblait pas probabiliste, mais nous y arrivons. Supposons que I soit un intervalle compact $[a, b]$ de $[0, +\infty]$. (On pourrait prendre aussi un compact quelconque de $[0, +\infty]$., mais cela compliquerait un peu les démonstrations). L'ensemble K sera l'ensemble "dédoublé" $I \times \{+,-\}$, où on appellera t_+ (resp. t_-) le point $(t,+)$ (resp.$(t,-)$); parfois on devra le garder tel quel, parfois en retirer a_- ou b_+ ou les deux, ou bien il y aura de petites difficultés pour $t= a$ ou b, ce sont des détails techniques sans importance, nous ferons comme si elles n'existaient pas pour être moins fastidieux. L'intervalle I dédoublé remplacera l'espace K antérieur. Il est muni d'une structure d'ordre total évidente. On le munira de la topologie produit; un système fondamental de voisinages de t_+ est celui des intervalles $[t_+, u_+]$, $u>t$, tandis qu'un système fondamental de voisinages de t_- est celui des intervalles $[v_-, t_-]$, $v< t$. C'est trivialement un compact, séparable et même séquentiellement séparable, parce que l'ensemble des r_+, r rationnels, y est séquentiellement dense, ainsi que l'ensemble des r_-, r rationnels. Et il n'est pas métrisable. Si en effet il l'était, son carré $K \times K$ le serait; or dans ce carré le sous-espace des points (t_-, t_+) est discret, et il a la puissance du continu. Il existe une identification évidente entre l'espace des fonctions continues sur K et l'espace des fonctions cadlag sur I, en assimilant une application $\underline{f}$ continue sur K et l'application f cadlag sur I, définie par $f(t)=\underline{f}(t_+)$. La tribu sur Cadlag $(I; \sigma(F, F'))$ est la plus petite pour laquelle les fonctions $f \mapsto f(t)$ de Cadlag$(I; \sigma(F, F'))$ dans F, pour tout $t\in I$, soient mesurables. Les théorèmes du § II donnent alors des théorèmes évidents, en remplaçant continue sur K par cadlag sur I, en se donnant en plus une filtration $(\mathcal{F}_t)$ de $\mathcal{F}$:

Théorème (III.1)

Soient E, F, des Banach, F réflexif séparable, I un intervalle compact de $[0,+\infty]$, u une application 0-radonifiante de E dans F. Si L: $E\to L^0$(Cadlag(I)) est un processus cylindrique adapté cadlag à valeurs dans E,

$L \in \mathcal{L}$ (E';Cadlag(I)), alors $u(L) = L \circ {}^t u \in \mathcal{L}$ (F'; Cadlag(I)),est un vrai processus adapté faiblement (ou scalairement) cadlag à valeurs dans F, $u(L) \in L^0$ (Cadlag(I); $\sigma(F, F')$), et on a les inégalités (I.2), avec les mêmes constantes.

Démonstration.

La seule chose à démontrer est relative à la filtration. L'application L sera (cylindriquement) adaptée si, pour tout t, et tout ξ, $L(\xi)_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable; a fortiori. $(L({}^tu\,(\eta))_t$ pour tout t et tout $\eta \in F'$. D'après la définition des application radonifiantes, si L est cylindriquement adaptée , $u(L_t)$ est $\mathcal{F}_t$- mesurable , donc le processus u(L) est adapté faiblement cadlag.

§ IV.TENSORISATION PAR UN BANACH V, L'ESPACE $V \varepsilon \sigma(F, F')$

Pour V et Φ espaces localement convexes, $V \varepsilon \Phi$ ([3]) est l'ensemble des applications linéaires continues de $\sigma(\Phi', \Phi)$ dans $\sigma(V, V')$, qui en outre transforment toute partie équicontinue de Φ' en une partie relativement compacte de V; V et Φ jouent des rôles symétriques, $V \varepsilon \Phi \simeq \Phi \varepsilon V$ par transposition.. Ce sont des formes bilinéaires sur $V' \times \Phi'$, et la topologie de $V \varepsilon \Phi$ est celle de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de V' et Φ'. Il est complet (resp. quasi-complet) si V et Φ le sont. Si V ou Φ a la propriété d'approximation équicontinue, $V \otimes \Phi$ est strictement dense dans $V \varepsilon \Phi$; si alors, comme on aura à l'utiliser dans la suite, V et Φ sont en outre quasi-complets, $V \varepsilon \Phi$ est le quasi-complété $V \widehat{\otimes}_\varepsilon \Phi$ de $V \otimes_\varepsilon \Phi$. Nous prendrons V Banach et $\Phi = \sigma(F, F')$, F Banach réflexif séparable. Alors la deuxième condition de la définition de $V \varepsilon \Phi$ est automatiquement vérifiée; en effet, une partie équicontinue du dual F' de $\sigma(F, F')$ est une partie relativement compacte de dimension finie de F', son image est une partie relativement faiblement compacte de V, de dimension finie donc relativement compacte. Donc

$V \varepsilon \sigma(F,F') = \mathcal{L}(\sigma(F', F) ; \sigma(V, V')) \simeq \mathcal{L}(\sigma(V', V) ; \sigma(F,F'))$.

La boule unité de F est faiblement compacte, donc faiblement complète, donc $\sigma(F, F')$ est quasi-complet, et V est complet, donc $V \varepsilon \sigma(F,F')$ est quasi-complet, et égal à $V \hat{\otimes}_\varepsilon \sigma(F, F')$ si V a la propriété d'approximation métrique.

La tribu qu'on prendra sur V est la moins fine qui rende mesurables les fonctions définies par les éléments du dual V', formes linéaires continues sur V. C'est sa tribu $\mathcal{C}$, suivant les notations des § I et II; étant donné la généralité de V, il n'y a pas de tribu τ naturelle. La norme sur V est alors mesurable sur V, si la boule unité de V' est *-faiblement séparable, car, pour $v \in V$, $|v|_V = \text{Sup}\{ |\langle v', v\rangle| , v' \in V', |v'|_{V'} \leqslant 1 \}$. La tribu qu'on prendra sur $V \varepsilon \Phi$ est la moins fine qui rende mesurables les fonctions réelles

$f \mapsto \langle f, (v', \eta) \rangle_{V \varepsilon \Phi, V' \times \Phi'}$ pour $v' \in V', \eta \in F'$, ou encore les applications $f \mapsto v' \circ f : F' \to V \to \mathbb{R}$ de $V \varepsilon \sigma(F, F')$ dans $\sigma(F', F)' = F$, pour $v' \in V'$. La norme qu'on mettra ici sur $V \varepsilon \Phi$ n'est pas celle qui donnera sa topologie ε habituelle; comme antérieurement, c'est, pour $\Phi = \sigma(F, F')$, $f \in \Phi$:

$|f|_\Phi = \text{Sup}\,\{ |\langle f, (v', \eta) \rangle|;\ v' \in V', |v'| \leqslant 1, \eta \in \Phi', |\eta| \leqslant 1 \} =$

$\text{Sup}\{ |v' \circ f|_F ;\ v' \in V', |v'| \leqslant 1 \}$; $V \varepsilon \Phi$ devient un Banach.

Il est connu que, si V est un espace localement convexe quasi-complet, K un compact, l'espace vectoriel topologique $C(K; \Phi)$ des applications continues de K dans Φ est exactement $C(K) \varepsilon \Phi$, donc $C(K) \hat{\otimes}_\varepsilon \Phi$, avec sa topologie ε parce que $C(K)$ a la propriété d'approximation métrique. En effet, l'espace $C(K) \otimes \Phi$ est l'espace des fonctions continues de rang fini de K dans Φ, et la topologie $\otimes_\varepsilon$ est celle de la convergence uniforme sur K dans l'espace $C(K; \Phi)$; celui-ci est quasi-complet et $C(K) \otimes F$ y est strictement dense, donc l'espace $C(K; \Phi)$ est bien le quasi-complété $C(K) \hat{\otimes}_\varepsilon \Phi$ (4).

En outre, la norme que nous utilisons ici est celle des théorèmes antérieurs. Par contre la tribu n'est pas la même; c'était τ dans C(K), c'est ici $\mathcal{C}$ pour V. Donc, dans les théorèmes précédents, on peut écrire $C(K) \hat{\otimes}_\varepsilon \sigma(F,F')$ et

Cadlag(I) $\overset{\cap}{\otimes}_\varepsilon$ σ(F,F') au lieu de C(K; σ(F, F')) et Cadlag(I;σ(F, F')), à condition de garder la tribu τ..

Il est donc naturel de généraliser les théorèmes de II et III comme suit.

Théorème (IV.1).

Soient E, F, V des Banach, F réflexif séparable muni de sa tribu borélienne, V muni de la tribu $\mathcal{C}$ engendrée par son dual V', V' à boule unité $*$-faiblement séparable, et $L \in \mathcal{L}(E'; L^0(V))$. Si u: E $\to$ F est 0-radonifiante, alors $u(L) \in L^0(V\ \varepsilon\ \sigma(F,F'))$, et $L^0(V \overset{\cap}{\otimes}_\varepsilon \sigma(F,F'))$ si V a la propriété d'approximation métrique, et on a les inégalités (II.4), avec les mêmes constantes, où C et β ne dépendent que de E, F, u et non de α, V, L. Si V ou F est de dimension finie, V ε σ(F, F') = V $\otimes_\varepsilon$ F, avec sa tribu et sa norme.

Démonstration..

L'espace V est le sous-espace fermé de l'espace C(B'*) des fonctions continues sur la boule unité B' de V' munie de la topologie $*$-faible, qui sont restrictions de formes linéaires sur V', ce qui se traduit par des égalités algébriques évidentes. La tribu $\mathcal{C}$ de V est induite par la tribu τ de C(B'*). Le théorème (II.2) appliqué à K=B'* dit que $L \in \mathcal{L}(E';L^0(V))$ donc $\in \mathcal{L}(E';L^0(C(B'^*)))$ entraîne $u(L) = X \in L^0(C(B'^*); \sigma(F, F')))$. Mais, pour tout $\eta \in F'$, ps. $\langle X, \eta\rangle = L({}^t u(\eta)) \in L^0(V)$; si, comme toujours, D' est un ensemble dénombrable dense dans F', ps. pour tout $\eta' \in F'$, $\langle X, \eta'\rangle \in L^0(V)$; on peut remplacer ps. par sûrement, $\langle X(\omega), \eta'\rangle \in V$. Mais, par (II.5), pour tout ω, si $\eta' \in D'$ converge (en norme) vers $\eta \in F'$, $\langle X(\omega), \eta'\rangle$ converge vers $\langle X(\omega), \eta\rangle$ dans C(B'*) par (II.5); puisque $\langle X(\omega), \eta'\rangle \in V$ fermé dans C(B'*), $\langle X(\omega), \eta\rangle \in V$ aussi pour tout $\eta \in F'$. En outre, si η_j converge vers 0 dans σ(F', F), $\langle X(\omega),\eta_j\rangle$ converge simplement vers 0 sur B'*, donc simplement sur V', , c. à d. converge vers 0 dans σ(V,V'), ce qui signifie que $X(\omega) \in V\ \varepsilon\ \sigma(F,F')$. En outre, X est mesurable quand on munit cet espace de la tribu déduite de la tribu τ de C(B'*), ou de la tribu $\mathcal{C}$ de V; et la norme de C(B'*) ε σ(F, F') induit celle de V ε .σ(F, F'). ♠

Le corollaire suivant montre que la différence probable entre les tribus τ et $\mathcal{T}$, indiquée au § II, ne joue pas pour la radonification:

Corollaire (IV.2).

Dans le théorème (II.2) et au § III, le même résultat subsiste si on remplace la tribu τ de C(K) ou Cadlag(I) par la tribu $\mathcal{T}$.

Démonstration.

Dans la démonstration du théorème (IV.1), on a pris V comme sous-espace fermé de C(B'*), et appliqué le théorème (II.2); il suffit maintenant au contraire de prendre V=C(K) et d'appliquer le théorème (IV.1), avec V'=M(K). Le présent corollaire n'est ni plus ni moins fort que le théorème (II.2), car l'un prend τ ou T à la fois pour Cadlag(I) et pour Cadlag(I; σ(F, F')).

§V. PROCESSUS ET PROCESSUS CYLINDRIQUES ADAPTÉS CADLAG A VARIATION FINIE.

Revenons à la situation du § III, où K est remplacé par un intervalle compact I = [a,b] de [0, +∞]. Alors V(I) sera l'espace vectoriel des fonctions réelles cadlag à variation finie sur I. Sa norme est la norme-variation usuelle: pour $f \in V(I)$,

$$|f|_{V(I)} = |f(a)| + \mathrm{Sup}_\Delta \Sigma\, |f(t_{i+1}) - f(t_i)|,$$

Sup sur toutes les sudivisions finies $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots)$ de I, $a \leqslant t_0 \leqslant t_1 \ldots \leqslant t_i \leqslant \ldots \leqslant b$; c'est la limite d'une suite croissante, où le pas de Δ tend vers 0. On a une définition et des propriétés analogues pour l'espace des fonctions cadlag à variation finie à valeurs dans un Banach F , ainsi que pour sa norme, en remplaçant V(I) par V(I;F), $|\,.\,|$ par $|\,.\,|_F$, $|X|_{V(I)}$ par $\|X\|_{V(I;\, F)}$. Si F est un Banach réflexif séparable, V(I; σ(F, F') sera l'espace des fonctions faiblement (ou scalairement) cadlag à variation finie à valeurs dans F, avec la norme suivante, qui en fait un Banach: pour $f \in V(I; \sigma(F,F'))$,

$$\text{(V.1)} \qquad \|f\|_{V(I;\, \sigma(F,F'))} = \mathrm{Sup}_{\eta \in F', |\eta|_{F'} \leqslant 1} |\langle X, \eta\rangle|_{V(I)} = \mathrm{Sup}_{\eta' \in D'} \quad ,$$

D' dénombrable dense dans F'.

On voit que $V(I)$(resp. $V(I; \sigma(F, F')))$ est un sous-espace de Cadlag(I) (resp. Cadlag(I; $\sigma(F, F')$)), avec une norme plus grande. On lui mettra la tribu τ induite par celle de Cadlag(I); elle rend la norme mesurable.

La tribu $\mathcal{T}$ est très peu intéressante parce que le dual de $V(I)$ est barbare: $V(I)$ est isométrique (par l'intégrale de Stieltjes) à l'espace $M(I)$ des mesures de Radon sur I, dual de $C(I)$; le dual de $V(I)$ est donc le dual de $M(I)$ ou bidual de $C(I)$. On sait toutefois que tous ceux-ci ont la propriété d'approximation métrique.

Soient E, F des Banach, F réflexif séparable, I un intervalle compact de $[0,+\infty]$, Ω, $\mathcal{F}$, P comme antérieurement. Un processus X faiblement "cadlag à variation finie" à valeurs dans F est une application mesurable de Ω dans $V(I; \sigma(F, F')$, $X \in L^0(V(I; \sigma(F, F'))$.

Un processus <u>cylindrique</u> L faiblement "cadlag à variation finie" à valeurs dans un Banach E est une application linéaire continue de E' dans $L^0(V(I))$, ou $L \in \mathcal{L}(E'; L^0(V(I)))$.

<u>Théorème (V.2).</u>

Soient E, F, des Banach, F réflexif séparable et u un application 0-radonifiante de E dans F. Si L est un processus cylindrique cadlag à variation finie à valeurs dans E, $L \in \mathcal{L}(E'; L^0(V(I))$, $u(L))$ est un vrai processus faiblement cadlag à variation finie à valeurs dans F, $u(L) \in L^0(V(I; \sigma(F, F')))$, et on a toujours les inégalités (II.4) avec les mêmes constantes, , où C et β ne dépendent que de E, F, u, α, non de Ω, P, I, L. Si L est adapté, u(L) est adapté.

<u>Démonstration.</u>

L'espace de Banach $V(I)$ a la boule de son dual $*$-faiblement séparable; en effet, $V(I)$ est isométrique à l'espace $M(I)$ des mesures de Radon sur I (ne pas confondre I et l'intervalle dédoublé K!), c. à d. au dual de l'espace $C(I)$ des fonctions continues; $C(I)$ est séparable, et sa boule unité est $*$-faiblement dense dans celle de $V'(I) = M'(I)=C''(I)$. On peut donc lui appliquer le théorème (IV.1), en le prenant comme espace V. Il nous suffit donc de montrer que $V(I) \varepsilon \sigma(F, F')$ est $V(I; \sigma(F,F'))$. La démonstration, triviale , est la même qu'au § IV pour $C(K)$ au lieu de $V(I)$. L'espace

$V(I) \otimes \sigma(F, F')$ est l'espace des applications ϕ faiblement cadlag à variation finie et de rang fini de I dans F. Sa topologie $\otimes_\varepsilon$ est celle de la convergence des $<\phi, \eta>$ dans V(I), pour tout η dans. F', c. à d. la topologie induite par la topologie usuelle de $V(I; \sigma(F, F')$; ce dernier espace est quasi-complet parce que $\sigma(F, F')$ l'est et que V(I) est un Banach; enfin $V(I) \otimes \sigma(F, F')$ y est strictement dense parce que V(I) a la propriété d'approximation métrique. On a donc bien $V(I; \sigma (F, F')) = V(I) \hat{\otimes}_\varepsilon \sigma(F, F')$. Les tribus et les normes choisies dans ces deux espaces sont les mêmes. Le théorème (V.2) est ainsi démontré par le théorème (4.I), mais en définissant les tribus de V(I) et $V(I; \sigma(F, F'))$ comme les tribus $\mathcal{C}$ engendrées par le dual affreux. de V(I), puisqu'il en est ainsi dans le théorème (IV.1). Ce n'est pas ce qu'il nous faut. On doit procéder autrement, par passage du fini à l'infini.

Tout d'abord on sait déjà que u(L) est un processus vrai adapté faiblement cadlag, à cause du théorème (II.2). La tribu τ de V(I) est induite par celle de Cadlag(I). Il reste seulement à voir les propriétés relatives à la variation finie avec la mesurabilité définie par la tribu τ de V(I). . Une subdivision Δ définit, pour toute fonction f sur I, une restriction f_Δ à Δ. On peut, dans énoncé du théorème (IV.1), remplacer I par Δ (avec la continuité en moins puisque Δ est discret), et dans l'énoncé du théorème (V.2), V(I) par $V(\Delta)$, L par $L_\Delta \in \mathcal{L}(E'; V(\Delta))$, u(L) par

$$u(L_\Delta) \in L^0 (V(\Delta; \sigma(F, F'))) = L^0 (V(\Delta) \varepsilon\, \sigma(F, F')) = L^0 (V(\Delta) \otimes_\varepsilon F)$$

parce que $V(\Delta)$ est de dimension finie.
Et le théorème est valable avec $\tau = \mathcal{C} =$ tribu borélienne de $V(\Delta)$. On obtient l'inégalité:

$$J_\beta (u(L_\Delta)) \leqslant C \operatorname{Sup}_{\xi \in E', |\xi|_{E'} \leqslant 1} J_\alpha (L_\Delta(\xi)) \leqslant C \operatorname{Sup}_{\xi \in E', |\xi|_{E'} \leqslant 1} J_\alpha (L(\xi)) < +\infty .$$

Il reste à prendre le Sup croissant du premier membre pour des raffinements de plus en plus fins de Δ où le pas de la subdivision tend vers 0, et l'on obtient J_β (u(L)) Cette fois la mesurabilité est relative à la tribu τ de V(I).♦

§ VI. LE THEOREME DES TROIS OPÉRATEURS.

On va manipuler maintenant des processus et processus cylindriques d'une nature bien plus compliquée, parce que non définie par des $L^0(\,.\,)$. Soit H un Banach.

On appelle $\mathcal{SM}(H)$ l'espace des (P-classes de) semi-martingales sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ à valeurs dans H; une semi-martingale X est une somme (d'une infinité de manières) d'un processus adapté cadlag à variation finie et d'une martingale locale cadlag. On écrit simplement $\mathcal{SM}$ si $H = \mathbb{R}$; c'est un "Fréchet non localement convexe" pour la topologie définie par Emery. On appelle semi-martingale fictive ou virtuelle ou cylindrique à valeurs dans un Banach E, une application linéaire continue L de E' dans $\mathcal{SM}$, $L = \mathcal{L}(E'; \mathcal{SM})$. Le résultat essentiel de cet article est le théorème suivant:

Théorème (VI.1) (théorème des trois opérateurs).

Soient E, F, G, H des Banach, F réflexif séparable, G réflexif, et des applications linéaires continues u: $E \to F$ 0-radonifiante, v: $F \to G$ 0-radonifiante, w: $G \to H$ 1-sommante. Si L est une semi-martingale cylindrique à valeurs dans E, $L \in \mathcal{L}(E'; \mathcal{SM})$, wvu(L) est une semi-martingale locale à valeurs dans H, et une semi-martingale si H a la propriété de Radon-Nikodym (en particulier s'il est réflexif), $wvu(L) \in \mathcal{SM}(H)$.

Démonstration.

(VI.1.1) D'abord L est cylindrique adaptée cadlag, donc d'après le § III, X=u(L) est un processus faiblement adapté cadlag. Posons

$T_k = \operatorname{Inf} \{ t \in I;\ |X_t|_F > k \}$; c'est un temps d'arrêt, et $|X^{T_k^-}|_F \leqslant k$.

Les T_k tendent stationnairement vers b=Sup I, lorsque k tend vers $+\infty$.

(V.1.2) Nous appellerons Y le processus borné $X^{T_k^-}$; il dépend de k, que nous omettons pour des raisons de simplicité. Il est scalairement une semi-martingale bornée donc à sauts bornés. On note $\mathcal{SM}_\delta$ (5) l'espace des semi-martingales à sauts bornés, avec la topologie suivante: Z_i converge vers 0 dans $\mathcal{SM}_\delta$ ssi il converge vers 0 dans $\mathcal{SM}$ et si le Sup.ess. des modules des sauts, Sup.ess.$|\Delta Z_i|_F$, converge vers 0. Ces semi-martingales sont spéciales,

en outre leur espace est la somme directe topologique $\mathcal{S}\mathcal{M}_\delta = \mathcal{V}_\delta^{\text{pré}} \oplus \mathcal{M}_\delta$; $\mathcal{V}_\delta^{\text{pré}}$ est le sous-espace de V(I) formé des processus prévisibles à sauts bornés, il est fermé dans $\mathcal{S}\mathcal{M}_\delta$, sa topologie est évidente, et c'est en fait la topologie induite par $\mathcal{S}\mathcal{M}_\delta$; $\mathcal{M}_\delta$ est l'espace des martingales locales à sauts bornés, nulles au temps initial, il a une topologie que nous ne donnerons pas ici, il est fermé dans $\mathcal{S}\mathcal{M}_\delta$, et c'est encore la topologie induite par $\mathcal{S}\mathcal{M}_\delta$.
Donc, pour tout $\eta \in F'$,
$<\mathcal{Y}, \eta> = W(\eta) + M(\eta)$, $W(\eta) \in \mathcal{V}_\delta^{\text{pré}}$, $M(\eta) \in \mathcal{M}_\delta$.
Nous avons remplacé " Y bornée" par "Y à sauts bornés"; c'est apparemment une perte, mais il n'en est rien, car de toute façon W(η) et M (η) sont seulement à sauts bornés, non nécessairement bornées.

Etant donné que $\eta \mapsto <\mathcal{Y}, \eta>$ est linéaire continue de F' dans $\mathcal{S}\mathcal{M}_\delta$, $\eta \mapsto W(\eta)$ et $\eta \mapsto M(\eta)$ sont linéaires continues de F' respectivement dans $\mathcal{V}_\delta^{\text{pré}}$ et $\mathcal{M}_\delta$. Mais on n'a là que des processus cylindriques W et M, et non des processus, alors que Y était un processus; cela vient de ce que Y n'était pas une semi-martingale, mais seulement scalairement une semi-martingale. Donc on semble avoir perdu le bénéfice de la transformation par u; mais cette transformation a permis de faire intervenir le temps d'arrêt T_k , donc d'obtenir W et M.

(VI.1.3). Etudions d'abord $v(M) \in \mathcal{L}(F';\mathcal{M}_\delta)$. En particulier $M \in \mathcal{L}$ (F';Cadlag (I)), donc, par le § III, v(M) est un vrai processus faiblement adapté cadlag à valeurs dans G, et bien sûr scalairement martingale locale à sauts bornés. . Pour appliquer le § III, on devrait supposer G séparable, ce qui n'a pas été fait dans l'énoncé du théorème des trois opérateurs. Mais F est séparable, donc v(F) est contenu dans un sous-Banach réflexif séparable G_0 de G. On sait que $v:F \rightarrow G_0$ est encore 0-radonifiante de F dans G_0 ([6]), ce qui permet de remplacer G par G_0 , ou encore de supposer G réflexif séparable, donc on a bien le droit d'appliquer le § III.

Puisque $v(M) : G' \to \mathcal{M}_\delta$ est linéaire continue, l'image de la boule unité de G' est bornée dans $\mathcal{M}_\delta$, donc il existe une constante $\delta > 0$ telle que, pour tout ζ de la boule unité de G', ps. les modules des sauts de $<v(M), \zeta>$ soient majorés par δ. Soit D' un sous-ensemble dénombrable dense dans G'; pour presque tout ω, pour tout ζ' de la boule unité de D', les modules des sauts de $<v(M)(\omega), \zeta'>$ sont majoré par δ, et on peut supposer que c'est vrai pour tout ω. Mais, pour tout ω, $v(M)(\omega)$ est bornée puisque faiblement cadlag,, donc, lorsque ζ' tend vers ζ dans la boule unité de G', $<v(M)(\omega), \zeta'>$ converge uniformément vers $<v(M)(\omega), \zeta>$, donc les modules des sauts de $<v(M)(\omega), \zeta>$ sont majorés par δ. Finalement les sauts de v(M) sont essentiellement bornés. Mais v(M) est prélocalement bornée, comme tout processus cadlag, et à sauts bornés, elle est donc localement bornée. Un temps d'arrêt qui la rend bornée, et scalairement martingale locale, la rend scalairement martingale, donc martingale, et scalairement cadlag donc cadlag; donc v(M) est une martingale locale cadlag, et il en est de même de wv(M).

(VI.1.4) Etudions maintenant v(W). C'est un processus, adapté scalairement prévisible à variation finie cadlag. Comme G est séparable, il est vraiment prévisible. Posons $f=v(W)(\omega)$. Reprenons une subdivision Δ du § V, $t_0=a<t_1 \ldots <t_{n-1}=b$. Restreinte à Δ, f devient une fonction f_Δ, scalairement à variation finie mais de rang fini; sa norme dans $V_\Delta \,\varepsilon\, \sigma(G, G')$ est sa norme dans $V_\Delta \otimes_\varepsilon G$. Appelons f^*_Δ la fonction sur $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ définie par:

$$f^*_\Delta(0)=f(a);\ f^*_\Delta(1)=f(t_1)-f(t_0);\ \ldots;\ f^*_\Delta(i)=f(t_i)-f(t_{i-1});\ldots f^*_\Delta(n-1)=f(b)-f(t_{n-2}).$$

Alors $|f_\Delta|_{V_\Delta \otimes_\varepsilon G} = |f^*_\Delta|_{l^1_n \otimes_\varepsilon G}$, norme de f^*_Δ dans l'espace des n-suites scalairement l^1 de G. Comme w est 1-sommante, elle transforme les suites scalairement l^1 en suites l^1, et, si $\pi_1(w)$ est la norme1-sommante de w:

$|w(f^*)_\Delta|_{l^1_n(H)} \leqslant \pi_1(w)\, |f^*_\Delta|_{l^1_n \otimes_\varepsilon G}$, ou encore

$$|(w(f)_\Delta|_{V_\Delta(H)} \leqslant \pi_1(w)\, |f_\Delta|_{V_\Delta \otimes_\varepsilon G} \cdot$$

En prenant dans les deux membres le Sup. pour toutes les subdivisions Δ, on trouve:

$$|w(f)\,|_{V(I;\ H)} \leqslant \pi_1\,(w)\, |f\,|_{V(I)\ \ \varepsilon\ \sigma(G,\ G')} \cdot$$

Alors, puisque f=v(W)(ω) est scalairement à variation finie, wf=wv(W) (ω) est à variation finie. Une fonction à variation finie est réglée; si elle est scalairement cadlag, elle est cadlag. On a donc maintenant montré que wv(W)) est un processus adapté à variation finie cadlag, à valeurs dans H.

(V.1.5) En combinant (V.1.3) et (V.1.4), on voit que le processus $wvu(L)^{T_k^-}$ est une semi-martingale à valeurs dans H. Il est de même de $wvu(L)^{T_k}$. Le processus wvu(L) est donc, comme annoncé, une semi-martingale locale. Il a fallu, pour y arriver, 3 opérateurs! Si maintenant H a la propriété de Radon-Nikodym, il est connu implicitement qu' une semi-martingale locale à valeurs dans H est une semi-martingale. Mais je ne connais pas de référence de cette propriété, très probablement démontrée par Catherine Doléans-Dade. Je ne la démontre pas ici, car elle est dans mon article du séminaire [2] .♣

<u>Corollaire (VI.2) (Üstünel)</u>

Si E, F, G, H sont des espaces hilbertiens, et $u:E \to F$, $v:F\to G$, $w:G\to H$, des opérateurs de Hilbert-Schmidt, wvu transforme toute semi-martingale cylindrique à valeurs dans E en une semi-martingale vraie à valeurs dan H.

<u>Corollaire (V.3)(Üstünel).([7]).</u>

Si E est un espace de Fréchet nucléaire, toute semi-martingale cylindrique L à valeurs dans E est une semi-martingale, et même à valeurs dans un sous-espace hilbertien de E.

19

J'ai moi-même appliqué le théorème d'Üstünel à l'étude des semi-martingales à valeurs dans un espace $C^\infty(U;V)$, où U,V sont des variétés C^∞ de dimensions finies. ([8]).

Ce qui est un peu vexant dans le théorème général des trois opérateurs, c'est qu'il est finalement assez difficile, et que je n'en connais aucune application qui ne soit pas une application du cas particulier d'Ustünel.

NOTES DE BAS DE PAGE.

Note ([1]), page 1. USTUNEL [1].

Note ([2]), page 3. SCHWARTZ, [1], séminaire XIII, proposition (XIII,3;2), page (XIII.5); SCHWARTZ, [2], Théorème XII, page 299.

Note ([3]), page 8. Pour tout ce qui concerne le produit tensoriel ε, voir SCHWARTZ [3] ; en particulier les Préliminaires, le chapitre I, dont corollaire 2 page 34 et proposition 5 page 35, corollaire 1 page 47, et Index terminologique page 198.

Note ([4]), page 9. GROTHENDIECK [1], page 88.

Note ([5]), page 12. Pour toutes les propriétés de $\mathcal{SM}$ et de $\mathcal{SM}_\delta$,voir SCHWARTZ [4], page 443 à 448. La propriété $\mathcal{SM}_\delta = \mathcal{V}^{\text{pré}}_\delta \oplus \mathcal{M}_\delta$ n'y est pas explicitement démontrée. Mais il est classique que c'est une somme directe algébrique; et comme les trois espaces sont des Fréchet (non localement convexes), elle est topologique.

Note ([6]),page 13. Voir SCHWARTZ [2], corollaire 3, page 200.

Note ([7]) page 14. ÜSTÜNEL [1] pour ces deux corollaires.

Note ([8]). L. SCHWARTZ, [5].

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

GROTHENDIECK Alexandre,[1] "Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires", Memoirs of the American Mathematical Society, 1955.

MAUREY Bernard, [1], "Théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans les espaces L^p ", chapitre V, Astérisque n° 11.

SCHWARTZ Laurent [1]: "Applications radonifiantes", séminaire Schwartz, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1969-70.

SCHWARTZ Laurent [2]: "Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures", Tata Institute of Fundamental Research, Oxford University Press, 1973.

SCHWARTZ Laurent [3]: "Théorie des Distributions à Valeurs Vectorielles", Annales de l'Institut Fourier, chapitre I, tome VII, 1957, et chapitre II, tome VIII, 1958.

SCHWARTZ Laurent, [4], "Les semi-martingales formelles", Séminaire de Probabilités XV, 1979-80, Lectures Notes in Mathematics, 850, pages 413-489.

SCHWARTZ Laurent,[5], "Semi-martingales à Valeurs dans des Espaces d'Applications C^∞ entre Espaces Vectoriels (I), Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 305, Série I, pages 49-53, 1987; et Le Théorème Φ^{-1}, et les Semi- Martingales à Valeurs dans des Espaces d'Applications C^∞ entre Variétés(II), C. R. Acad. Sc. Paris, tome 305, Série I, p. 49-53, 1987.

USTUNEL Ali Süleyman[1], "A characterization of semi-martingales on nuclear spaces", Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete", 60, pages 21-39, 1982.

TABLE DES MATIERES.

Laurent SCHWARTZ,
37, Rue Pierre Nicole, 75005 Paris.
Tél. (33)(1) 43 54 50 30.
Fax: (33)(1) 43 29 49 60.
email: schwartz@dmi.ens.fr

Centre de Mathématiques,
Ecole Polyechnique,
91128 Palaiseau Cédex.