ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

SAÏD BENAYADI

Sur une famille d'algèbres de Lie idéalement finies

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, n° 2 (1996), p. 23-31

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_2_23_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 2, 1996, pp.23-31

SUR UNE FAMILLE D'ALGEBRES DE LIE IDEALEMENT FINIES

Saïd BENAYADI

Université de Metz, Département de Mathématiques et d'Informatique,
U.A. CNRS n° 399, Ile du Saulcy, F-57045 Metz cedex 01, France.
E-mail adress: benayadi@poncelet.univ-metz.fr

Résumé. On étudie la structure des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ où toute partie finie est contenue dans un idéal I de dimension finie qui vérifie $[I, I] = I, Der(I) = ad(I), \mathfrak{z}(I) = \{0\}$, que nous appellerons les algèbres de Lie localement sympathiques. Dans cette étude, on généralise d'une part des résultats obtenus par I. Stewart dans [St] sur les algèbres de Lie idéalement finie semi-simples, et d'autre part des résultats que nous avons obtenus dans [Be1,2] sur les algèbres de Lie sympathiques de dimension finie.

0. Introduction

Les algèbres de Lie envisagées dans cet article sont définies sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et soient $Der(\mathfrak{g})$, $ad(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, respectivement l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{g}$, l'idéal des dérivations intérieures de $\mathfrak{g}$, le centre de $\mathfrak{g}$.

Suivant [An], une algèbre de Lie est sympathique si son centre est nul, si elle est égale à son idéal dérivé et si toutes ses dérivations sont intérieures. Les algèbres de Lie semi-simples de dimension finie sont sympathiques, mais il existe par contre des algèbres de Lie sympathiques non semi-simples de dimension finie, comme le montre une famille d'exemples construite par E.Angelopoulos [An]. Une étude des propriétés de la structure sympathique est faite dans [Be1,2], cette étude montre l'analogie avec la structure semi-simple et les limites de cette analogie.

Dans [St], I. Stewart étudie la classe des algèbres de Lie qui sont engendrées par leurs familles d'idéaux de dimension finie, il les a appelées: algèbres de Lie idéalement finies. Dans les chapitres 4 et 6 de [St], I. Stewart étudie les algèbres de Lie idéalement finies qui sont semi-simples, trouve un radical pour la structure semi-simple et une décomposition qui généralise celle de Lévi-Malcev dans le cas des algèbres de Lie de dimension finie.

Il est facile de voir que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie idéalement finie, semi-simple et de dimension infinie, alors $\mathfrak{g}$ n'est pas sympathique car elle a des dérivations qui ne sont pas intérieures, par contre $\mathfrak{g}$ est localement sympathique c-à-d toute partie finie de $\mathfrak{g}$ est contenue dans un idéal sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Dans [An] et [Be2], on trouve des exemples d'algèbres de Lie sympathiques de dimension finie qui ne sont pas semi-simples, ce qui montre que la classe des algèbres de Lie localement sympathiques contient strictement la classe des algèbres de Lie idéalement finies qui sont semi-simples.

Le but de cet article est l'étude de la classe des algèbres de Lie localement sympathiques. Les résultats qu'on obtient dans ce travail généralisent d'une part des résultats obtenus par I. Stewart dans [St], et d'autre part des résultats que nous avons obtenus sur les algèbres de Lie sympathiques de dimension finie dans [Be1,2].

1. Algèbres de Lie idéalement finies [St]

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats dont les preuves se trouvent dans [St].

Définition 1.1 [St] Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{J} = \{I_j, j \in J\}$ une famille d'idéaux de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{J}$ est dit un système local de $\mathfrak{g}$ si les deux assertions suivantes sont vérifiées:
i) $\mathfrak{g} = \cup_{j\in J} I_j$;
ii) Pour tous j, l éléments de J, il existe k dans J tel que $I_j + I_l$ est contenu dans I_k.

Définition 1.2 Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite idéalement finie si la famille des idéaux de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est un système local de $\mathfrak{g}$.

Définition 1.3 1) Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle n'admet aucun idéal abélien non nul.
2) Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$ est dite simple si elle n'admet aucun idéal non trivial.

Le Théorème suivant est le résultat principal du quatrième chapitre de [St].

Théorème 1.1 [St] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie et semi-simple. Alors $\mathfrak{g} = \oplus_{j\in J}\mathfrak{g}_j$ où $\{\mathfrak{g}_j, j \in J\}$ est la famille des idéaux simples de dimension finie de $\mathfrak{g}$.

Définition 1.4 Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite localement résoluble si la famille des idéaux résolubles de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est un système local de $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.1 [St] Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie et $\{F_j\}_{j\in J}$ la famille des idéaux de dimension finie de $\mathfrak{g}$.
$R(\mathfrak{g}) = \sum_{j\in J} R(F_j)$ (où $R(F_j)$ est le radical de F_j quel que soit j élément de J) est le plus grand idéal localement résoluble de $\mathfrak{g}$.
$R(\mathfrak{g})$ est appelé le radical de $\mathfrak{g}$.

Le Théorème suivant est le résultat principal du sixième chapitre de [St].

Théorème 1.2 [St] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie et soit $R(\mathfrak{g})$ son radical. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus R(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathfrak{g}$.

Remarque Ce théorème généralise la décomposition de Lévi-Malcev d'une algèbre de Lie de dimension finie.

2. Algèbres de Lie Localement sympathiques

2.1. Rappels de quelques résultats sur les algèbres de Lie sympathiques

Les démonstrations des résultats suivants se trouvent dans [Be1,2].

Définition 2.1.1 1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et soit I un idéal de $\mathfrak{g}$. I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$ s'il existe un idéal J de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = I \oplus J$.
2) Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite irréductible si elle n'a aucun facteur direct non nul.

Définition 2.1.2 Une algèbre de Lie est dite sympathique si $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $Der(\mathfrak{g}) = ad(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Proposition 2.1.1 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sympathique et I un idéal de $\mathfrak{g}$. Si I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, alors I est sympathique.

Proposition 2.1.2 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et I, J deux idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $I \cap J = \{0\}$. Si I et J sont sympathiques, alors l'idéal $H = I \oplus J$ est sympathique.

Proposition 2.1.3 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et I un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $Der(I) = ad(I)$. Si l'une des deux hypothèses suivantes:
i) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$;
ii) $\mathfrak{z}(I) = \{0\}$
est vérifiée, alors I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$.

Corollaire i) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sympathique et I un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors I est sympathique si, et seulement si I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$.
ii) Toute extension d'une algèbre de Lie sympathique par une algèbre de Lie sympathique est sympathique et triviale.

Théorème 2.1.1*Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sympathique de dimension finie.
Alors, $\mathfrak{g} = h_1 \oplus \ldots \oplus h_n$ où chaque h_i est un idéal sympathique irréductible de $\mathfrak{g}$; en plus cette décomposition est unique.*

Théorème 2.1.2 *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, I et J deux idéaux de $\mathfrak{g}$.
i) Si I est sympathique et J est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, alors $I \cap J$ est un idéal sympathique de $\mathfrak{g}$.
ii) Si I et J sont des idéaux sympathiques de $\mathfrak{g}$, alors $I \cap J$ et $I + J$ sont des idéaux sympathiques de $\mathfrak{g}$.*

2.2. Décomposition des algèbres de Lie localement sympathiques

Dans ce paragraphe. nous étudions la structure des algèbres de Lie localement sympathiques.

Définition 2.2.1 Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite localement sympathique si la famille des idéaux sympathiques de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est un système local de $\mathfrak{g}$.

Dans la proposition suivante, on donne des caractérisations des algèbres de Lie localement sympathiques.

Proposition 2.2.1 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\{M_j\}_{j\in J}$ la famille des idéaux sympathiques de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Les assertions suivantes sont équivalentes:
1) $\mathfrak{g}$ est localement sympathique;
2) $\mathfrak{g} = \cup_{j\in J} M_j$;
3) $\mathfrak{g} = \sum_{j\in J} M_j$;
4) Toute partie finie d'éléments de $\mathfrak{g}$ est contenue dans un idéal sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$;
5) Tout élément de $\mathfrak{g}$ est contenu dans un idéal sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$;
6) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ et pour tout élément x de $\mathfrak{g}$ il existe un idéal I de dimension finie de $\mathfrak{g}$ tel que x est contenu dans I et $Der(I) = ad(I)$.

Preuve Par le théorème 2.1.2, une somme finie d'idéaux sympathiques de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est un idéal sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$, et par suite les cinq premières assertions de la proposition 2.2.1 sont équivalentes.
5) implique 6) est une implication évidente.
6) implique 5). Soit x un élément de $\mathfrak{g}$, alors il existe un idéal I de dimension finie de $\mathfrak{g}$ tel que x est contenu dans I et $Der(I) = ad(I)$. Par la proposition 2.1.3, il existe J un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = I \oplus J$, et par conséquent $I = [I, I]$ et $\mathfrak{z}(I) = \{0\}$. Ce qui prouve que I est un idéal sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$ contenant x. $\diamondsuit$

Remarque Une algèbre de Lie idéalement finie semi-simple est localement sympathique. Dans [An] et [Be2], on trouve des exemples d'algèbres de Lie sympathiques de dimension finie qui ne sont pas semi-simples. Ce qui montre que la réciproque est fausse.

Proposition 2.2.2 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et I, J deux idéaux de $\mathfrak{g}$. Si I et J sont des idéaux localement sympathiques de $\mathfrak{g}$, alors $I \cap J$ et $I + J$ sont des idéaux localement sympathiques de $\mathfrak{g}$.

Preuve Soit x un élément de $I \cap J$, alors il existe un idéal M (resp. N) sympathique de dimension finie de I (resp. J) contenant x. Comme $[M, M] = M$ et $[N, N] = N$, alors M (resp. N) est un idéal caractéristique de I (resp. J), et par suite M et N sont des idéaux sympathique de $\mathfrak{g}$. Par le théorème 2.1.2, $M \cap N$ est un idéal sympathique de $\mathfrak{g}$ donc de $I \cap J$ contenant x. On en déduit que $I \cap J$ est un idéal localement sympathique. En utilisant le théorème 2.1.2, on voit facilement que $I + J$ est un idéal localement sympathique de $\mathfrak{g}$. $\diamondsuit$

Le lemme suivant est fondamental, il va nous permettre de montrer le théorème 2.2.1 qui est l'un des principaux résultats de ce paragraphe.

Lemme 2.2.1 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\{h_t\}_{t\in T}$ une famille d'idéaux sympathiques irréductibles de $\mathfrak{g}$. Alors:
1) $\sum_{t\in T} h_t = \oplus_{t\in T} h_t$;
2) $\oplus_{t\in T} h_t$ est sympathique si, et seulement si T est fini.

Preuve 1) Soient $t \in T$ et $l \in T\backslash\{t\}$. Par le théorème 2.1.2, $h_t \cap h_l$ est un idéal sympathique de $\mathfrak{g}$, par conséquent $h_t \cap h_l = \{0\}$ car $h_t \neq h_l$. Donc $[h_t, \oplus_{l\in T\backslash\{t\}} h_l] = \{0\}$. et par suite $h_t \cap (\oplus_{l\in T\backslash\{t\}} h_l) = \{0\}$. On conclut que $\sum_{t\in T} h_t = \oplus_{t\in T} h_t$.
2) Si T est fini, alors par la proposition 2.1.2, $\oplus_{t\in T} h_t$ est sympathique.

Réciproquement, supposons que T est infini, notons par U une partie dénombrable de T. En identifiant U à $\mathbb{N}$, on peut dire que $\mathbb{N}$ est contenu dans T. Montrons que $H = \oplus_{n\in\mathbb{N}} h_n$ n'est pas sympathique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons un élément x_n non nul de h_n. Soit D l'endomorphisme de H défini par: $D_{|h_n} = ad_{h_n} x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On vérifie facilement que D est une dérivation de H. D n'est pas une dérivation intérieure de H car sinon il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $D(\oplus_{n\geq m} h_m) = \{0\}$, ce qui entraîne que $x_n = 0$ pour tout entier $n \geq m$, et ceci contredit le choix des x_n. On conclut que H n'est pas sympathique, et par le crollaire de la proposition 2.1.3, $\oplus_{t\in T} h_t$ n'est pas sympathique. $\diamondsuit$

Théorème 2.2.1 *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie.*
1) $\mathfrak{g}$ *est localement sympathique si, et seulement si* $\mathfrak{g} = \oplus_{t\in T} h_t$ *où* $\{h_t, t \in T\}$ *est la famille des idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de* $\mathfrak{g}$.
2) Si $\mathfrak{g}$ *est localement sympathique, alors tout idéal sympathique de* $\mathfrak{g}$ *est de dimension finie.*

Preuve 1) Si $\mathfrak{g} = \oplus_{t\in T} h_t$ où $\{h_t, t \in T\}$ est la famille des idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$, par la proposition 2.1.2, $\mathfrak{g}$ est localement sympathique. Réciproquement, supposons que $\mathfrak{g}$ est localement sympathique. Soit $x \in \mathfrak{g}$, alors il existe un idéal I sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$ tel que $x \in I$. Par le théorème 2.1.1, $I = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ où $\{I_j, 1 \leq j \leq n\}$ est la famille des idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de I. Soit j un élément de $\{1, ..., n\}$, comme $[I_j, I_j] = I_j$, alors I_j est un idéal caractéristique de I, par suite I_j est un idéal de $\mathfrak{g}$. On conclut que $\mathfrak{g} = \oplus_{t\in T} h_t$ où $\{h_t, t \in T\}$ est la famille des idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$.

2) Supposons que $\mathfrak{g}$ est localement sympathique, $\mathfrak{g} = \oplus_{t\in T} h_t$ où $\{h_t, t \in T\}$ est la famille des idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Soit M un idéal sympathique de $\mathfrak{g}$, alors $[\mathfrak{g}, M] = M$, et par suite $M = \oplus_{t\in T} h_t \cap M$. Par le lemme 2.2.1, $U = \{t \in T : h_t \cap M \neq \{0\}\}$ est une partie finie de T et $M = \oplus_{u\in U} h_u$, par conséquent M est de dimension finie. $\diamondsuit$

Remarque Ce théorème réduit l'étude des algèbres de Lie localement sympathiques à celles qui sont localement sympathiques et irréductibles. Il généralise d'une part le théorème 1.1 que I. Stewart a obtenu dans [St], et d'autre part la décomposition d'une algèbre de Lie sympathique de dimension finie qu'on a obtenue dans [Be1].

Contrairement aux cas des algèbres de Lie idéalement finie semi-simples, un idéal d'une algèbre de Lie localement sympathique n'est pas en général un facteur direct. Dans la proposition suivante , on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal d'une algèbre de Lie localement sympathique soit facteur direct.

Proposition 2.2.3 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie localement sympathique et soit I un idéal de $\mathfrak{g}$. I est localement sympathique si, et seulement si I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$.

Preuve Supposons que I est localement sympathique. Par le théorème 2.2.1. $I = \oplus_{s\in S} L_s$ où $\{L_s, s \in S\}$ est la famille des idéaux sympathiques irréductibles de I. Comme les idéaux sympathiques sont caractéristiques, alors $\{L_s, s \in S\}$ est une famille d'idéaux sympathiques irréductibles de $\mathfrak{g}$. Par le théorème 2.2.1, I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$.
Réciproquement, supposons que I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$. Soit x un élément de I. alors il existe un idéal M sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$ contenant x. Par le théorème 2.1.2.

$I \cap M$ est un idéal sympathique de $\mathfrak{g}$ qui contient x. Ce qui prouve que I est localement sympathique. ◇

3. Le ls-radical d'une algèbre de Lie idéalement finie

Proposition 3.1 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.
1) $\mathfrak{g}$ possède un plus grand idéal localement sympathique qu'on note M.
2) $M = \oplus_{t\in T} h_t$ où $\{h_t\}_{t\in T}$ est la famille des idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$.
3) Si tout élément de $\mathfrak{g}$ est contenu dans un idéal de dimension finie qui est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, alors tout idéal sympathique de $\mathfrak{g}$ est de dimension finie.

Preuve $\{M_j, j \in J\}$ la famille des idéaux sympathiques de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Par la proposition 2.2.1, $M = \sum_{j\in J} M_j$ est un idéal localement sympathique de $\mathfrak{g}$.

Soient N un idéal localement sympathique de $\mathfrak{g}$ et x un élément de N. Alors il existe un idéal sympathique T de dimension finie de N contenant x. Comme $[T, T] = T$, T est un idéal caractéristique de N, par conséquent T est un idéal de $\mathfrak{g}$ et donc T est contenu dans M. Ce qui prouve que N est contenu dans M. On conclut que M est le plus grand idéal localement sympathique de $\mathfrak{g}$

ii) Par théorème 2.2.1, tout idéal sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est la somme directe de ses idéaux sympathiques irréductibles qui sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ car ils sont caractéristiques, et par suite $M = \sum_{i\in I} h_i$ où $\{h_i, i \in I\}$ est la famille des idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Par le lemme 2.2.1, $M = \oplus_{i\in I} h_i$.

iii) Supposons que tout élément de $\mathfrak{g}$ est contenu dans un facteur direct de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Soit N un idéal sympathique de $\mathfrak{g}$ et soit x un élément de N. Il existe F un facteur direct de dimension finie de $\mathfrak{g}$ contenant x. Par le théorème 2.1.2, $N \cap F$ est un idéal sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$ contenant x. Par le théorème 2.2.1, N est de dimension finie. ◇

Lemme 3.1 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et I un idéal de $\mathfrak{g}$. S'il existe un idéal J de $\mathfrak{g}$ qui vérifie:
1) $[J, J] = J$ et $\mathfrak{z}(J) = \{0\}$,
2) $\mathfrak{g} = I \oplus J$,
alors I est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$.

Preuve Soient x un élément de I et D une dérivation de $\mathfrak{g}$. $D(x) = y + z$ où y (resp. z) est un élément de I (resp. J). Soit z' un élément de J, alors $[z, z'] = -[x, D(z')]$. Comme $[J, J] = J$, J est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$, par conséquent $[z, z'] = 0$. Donc $z = 0$. Ce qui prouve que $D(I)$ est contenu dans I. ◇

Proposition 3.2 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\{h_t\}_{t\in T}$ la famille des idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et M le plus grand idéal localement sympathique de $\mathfrak{g}$.

1) La famille des idéaux J de $\mathfrak{g}$ tels que $J \cap M = \{0\}$ possède un plus grand élément qu'on note L.

2) Pour tout t élément de T, il existe un idéal N_t de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = h_t \oplus N_t$.

3) $L = \cap_{t\in T} N_t$ et L est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$.

4) Si M est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g} = M \oplus L$ et L est le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ qui est facteur direct et qui ne possède aucun idéal localement sympathique non nul.

Preuve 1) Notons $\mathfrak{F}$ la famille des idéaux J de $\mathfrak{g}$ tels que $J \cap M = \{0\}$. Donc $[J, M] = \{0\}$ pour tout J élément de $\mathfrak{F}$, et par suite $[\sum_{J\in\mathfrak{F}} J, M] = \{0\}$, ce qui implique que $\sum_{J\in\mathfrak{F}} J \cap M = \{0\}$ car $\mathfrak{z}(M) = \{0\}$. On conclut que $\mathfrak{F}$ possède un plus grand élément, et plus précisement cet élément est $L = \sum_{J\in\mathfrak{F}} J$.

2) Par la proposition 2.1.3, pour tout élément t de T, il existe un idéal N_t de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = h_t \oplus N_t$.

3) $[\cap_{t\in T} N_t, M] = \{0\}$ implique que $(\cap_{t\in T} N_t) \cap M = \{0\}$ car $\mathfrak{z}(M) = \{0\}$, par conséquent $\cap_{t\in T} N_t$ est contenu dans L. Soit t un élément de T, comme $[L + N_t, h_t] = \{0\}$, alors $(L + N_t) \cap h_t = \{0\}$, et par suite L est contenu dans $\cap_{t\in T} N_t$. On conclut que $L = \cap_{t\in T} N_t$.

Par le lemme 3.1, N_t est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$ quel que soit t élément de T, par conséquent L est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$.

4) Supposons que M est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, alors il existe J un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = M \oplus J$. Comme $[L + J, M] = \{0\}$, alors $(L + J) \cap M = \{0\}$. Par conséquent $L + J$ est contenu dans L, donc L contient J.
Comme $\mathfrak{g} = M \oplus J$, $J \subset L$ et $L \cap M = \{0\}$, alors L est contenu dans J. On conclut que $L = J$.
Soit T un idéal qui est facteur direct de $\mathfrak{g}$ et qui ne possède aucun idéal localement sympathique non nul. Il existe alors H un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = H \oplus T$. Soit W le plus grand idéal localement sympathique de H, donc W est un idéal de $\mathfrak{g}$ et il est un facteur direct de H. Ce qui entraîne l'existence d'un idéal C de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = W \oplus C \oplus T$ et C, T qui ne possèdent aucun idéal localement sympathique non nul. Ce qui prouve que $M = W$ et que T est contenu dans L. $\diamondsuit$

Définition 3.1 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie, M son plus grand idéal localement sympathique, L le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ qui est facteur direct et qui ne possède aucun idéal localement sympathique non nul et $R(L)$ le radical de L.
On appelle $R(L)$ le radical de $\mathfrak{g}$ pour la structure localement sympathique et on le note $P(\mathfrak{g})$.
Pour abréger, on va appeler $P(\mathfrak{g})$ le ls-radical de $\mathfrak{g}$.

Théorème 3.1*Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie et M son plus grand idéal localement sympathique. Supposons que M est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, alors:*
1) $\mathfrak{g}$ est localement sympathique si, et seulement si $P(\mathfrak{g}) = \{0\}$.
2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus P(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{m}$ est une sous-algèbre de Lie localement sympathique de $\mathfrak{g}$.

Preuve Soit L le plus grand idéal J de $\mathfrak{g}$ tel que $J \cap M = \{0\}$. Supposons que M est un facteur directeur de $\mathfrak{g}$, alors il existe T un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = M \oplus T$. Comme $T \cap M = \{0\}$, alors T est contenu dans L, par suite $T = L$ car $L \cap M = \{0\}$.

1) Si $P(\mathfrak{g}) = \{0\}$, alors L est un idéal semi-simple de $\mathfrak{g}$, et par suite L est localement sympathique. Donc $L = \{0\}$, ce qui prouve que $\mathfrak{g}$ est localement sympathique.

2) Par le théorème 1.2, $L = \mathfrak{s} \oplus P(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple de L, donc $\mathfrak{g} = (M \oplus \mathfrak{s}) \oplus P(\mathfrak{g})$.
Soit x un élément de $M \oplus \mathfrak{s}$, alors il existe un idéal sympathique I de dimension finie de M donc de $\mathfrak{g}$ et un idéal $\mathfrak{s}_1$ de dimension finie de $\mathfrak{s}$ qui est semi-simple tels que $x \in I \oplus \mathfrak{s}_1$.

Par le corollaire de proposition 2.1.3, $I \oplus \mathfrak{s}_1$ est une sous-algèbre de Lie sympathique de dimension finie de $\mathfrak{g}$, on vérifie facilement que $I \oplus \mathfrak{s}_1$ est un idéal de $M \oplus \mathfrak{s}$. On conclut que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus P(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{m} = M \oplus \mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Lie localement sympathique de $\mathfrak{g}$. $\diamond$

Remarque Si $\mathfrak{g}$ ne contient aucun idéal localement sympathique non semi-simple, alors M (resp. $P(\mathfrak{g})$) coïncide avec le plus grand idéal semi-simple de $\mathfrak{g}$ (resp. $R(\mathfrak{g})$ le plus grand idéal localement résoluble de $\mathfrak{g}$). Dans ce cas M est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, et l'assertion 2) du théorème 3.1 est le théorème 1.2 obtenu par I. Stewart dans [St].

Proposition 3.3 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie et M son plus grand idéal localement sympathique. Si l'une des trois hypothèses suivantes:
1) Tout élément de $\mathfrak{g}$ est contenu dans un facteur direct de dimension finie de $\mathfrak{g}$,
2) Toute suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ est stationnaire,
3) Toute suite décroissante d'idéaux de $\mathfrak{g}$ est stationnaire
est vérifiée, alors:
a) M est sympathique et donc facteur direct de $\mathfrak{g}$,
b) $\mathfrak{g}$ est localement sympathique si, et seulement si $P(\mathfrak{g}) = \{0\}$.
c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus P(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{m}$ est une sous-algèbre de Lie localement sympathique de $\mathfrak{g}$.

Preuve i) Supposons que l'hypothèse 1) est vérifiée. Soit L le plus grand idéal J de $\mathfrak{g}$ tel que $M \cap J = \{0\}$. Soit $x \in \mathfrak{g}$, alors il existe I un facteur direct de dimension finie de $\mathfrak{g}$ contenant x. Par le corollaire de la proposition 2.1.3, $I = N \oplus T$ où N est le plus grand idéal sympathique de I et T est le plus grand idéal de I qui ne possède aucun idéal sympathique non nul. Comme N est sympathique, N est un idéal de $\mathfrak{g}$, et par suite $N \subset M$. Le fait que I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$ implique que T est un idéal de $\mathfrak{g}$ qui est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, par conséquent $T \cap M$ est un idéal sympathique de $\mathfrak{g}$. Donc $T \cap M = \{0\}$, ce qui prouve que T est contenu dans L. On conclut que $\mathfrak{g} = M \oplus L$, d'où l'assertion a).
Par le théorème 3.1, l'assertion b) est vérifiée.
L'assertion c) est évidente.

ii) Si on suppose que $\mathfrak{g}$ possède une infinité d'idéaux sympathiques de dimension finie, on considère une famille $\{h_n, n \in \mathbb{N}\}$ d'idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}$ telle que $h_n \neq h_m$ si $n \neq m$. On pose $M_n = \oplus_{0 \leq i \leq n} h_i$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$. Par la proposition 2.1.3, pour tout n entier positif non nul, il existe un idéal N_n de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = M_n \oplus N_n$. Il est facile de voir que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$) est une suite strictement croissante (resp. décroissante) d'idéaux de $\mathfrak{g}$.
Donc si l'une des hypothèses 2) ou 3) est vérifiée, alors $\mathfrak{g}$ possède un nombre fini d'idéaux sympathiques irréductibles de dimension finie, et par suite M est sympathique de dimension finie. Par la proposition 2.1.3 (resp. le théorème 3.1) L'assertion a) (resp. b)) est vérifiée. L'assertion c) est évidente. $\diamond$

Remarque Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension finie. alors les trois hypothèses de la proposition 3.3 sont vérifiées, et les assertions a), b), c) de cette proposition sont des résultats que nous avons obtenus dans [Be2].

Dans la suite, on va voir quelques propriétés du ls-radical d'une algèbre de Lie idéalement finie.

Définition 3.2 [St] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une dérivation D de $\mathfrak{g}$ est dite localement finie, si toute partie finie de $\mathfrak{g}$ est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathfrak{g}$, invariant par D.

Proposition 3.4 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie et D une dérivation de $\mathfrak{g}$, localement finie. Alors $P(\mathfrak{g})$ est invariant par D.

Preuve Soient M le plus grand idéal localement sympathique de $\mathfrak{g}$ et L le plus grand idéal J de $\mathfrak{g}$ tel que $J \cap M = \{0\}$. Par la proposition 3.2, L est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$, par conséquent $D_{|L}$ est une dérivation localement finie de L. Donc par la proposition 4.2 de [St], $D(R(L))$ est contenu dans $R(L)$. Rappelons que par définition $P(\mathfrak{g}) = R(L)$, on conclut que $P(\mathfrak{g})$ est invariant par D. $\diamondsuit$

Proposition 3.5 Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie, M son plus grand idéal localement sympathique et I un idéal de $\mathfrak{g}$.
Si $M \cap I$ est le plus grand idéal localement sympathique de I, alors $P(I) = P(\mathfrak{g}) \cap I$.

Preuve Supposons que $W = M \cap I$ où W est le plus grand idéal localement sympathique de I. Soit L (resp. T) le plus grand idéal J (resp. H) de $\mathfrak{g}$ (resp. I) tel que $J \cap M = \{0\}$ (resp. $H \cap W = \{0\}$). Par la proposition 3.2, T est un idéal caractéristique de I, donc T est un idéal de $\mathfrak{g}$. On sait que $T \cap W = \{0\}$, alors $T \cap M = \{0\}$. Comme T est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors T est contenu dans L, par conséquent $T = L \cap I$. Par la proposition 4.6 de [St], $R(T) = R(L) \cap I$, et par suite $P(I) = P(\mathfrak{g}) \cap I$.

Corollaire Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie idéalement finie, M son plus grand idéal localement sympathique et I un idéal de $\mathfrak{g}$.
i) Si I est un facteur direct de $\mathfrak{g}$, alors $P(I) = P(\mathfrak{g}) \cap I$.
ii) Si M est contenu dans I, alors $P(I) = P(\mathfrak{g}) \cap I$.

REFERENCES

[An] E. Angelopoulos, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 306, série I, 1988, p. 523-525.

[Be1] S. Benayadi, Certaines propriétés d'une classe d'algèbres de Lie qui généralisent les algèbres de Lie semi-simples, Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. XII, N 1, 1991, p. 29-35.

[Be2] S. Benayadi, *Structure of perfect Lie algebras without center and outer derivations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse (à paraître).

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, ch. 1, Hermann, Paris. 1971.

[St] I. N. Stewart, *Lie algebras generated by finite-dimensional ideals*. Pitman Publishing, London, 1975.