ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

PHILIPPE VESCHAMBRE

Cardinalité, saturation et finitude

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, n° 1 (1997), p. 103-110
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_103_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 4, N° 1, 1997, pp.103-110

CARDINALITE, SATURATION ET FINITUDE

Philippe Veschambre

Cet exposé regroupe des résultats connus, dûs essentiellement à J. KEISLER et M. BENDA. Leurs contexes en ont été modifiés ainsi que leurs présentations.

Introduction

Tout comme l'algébriste a besoin de corps suffisament clos et le topologue d'espaces suffisament complets, le "modéliste" a besoin de modèles suffisamment saturés. L'objet de cet exposé est l'étude du lien qui existe entre la saturation et le cardinal d'un modèle.

L'idée selon laquelle la saturation exprime l'absence de trous se traduit pour la plupart des résultats par des minorations du cardinal du modèle liées à sa saturation. Je donnerai quelques un des ces résultats.

Je donnerai également deux résultats, les théorèmes 1 et 2, de nature un peu différente qui étayeront, mais de façon incomplète, l'idée intuitive qui suggère qu'une des finitudes de l'analyse non standard serait de "repousser les limites du fini".

Notations et conventions

On suppose ZFC consistant et on s'en donne un modèle $\mathfrak{M}$.
A partir de là, on considèrera deux univers : l' univers de $\mathfrak{M}$, et un autre univers $^*\mathfrak{M}$, qui sera une extension compréhensive du premier ($^*\mathfrak{M}$ pouvant être une ultrapuissance, un élargissement, etc...).

X étant un ensemble et $^*X$ son extension, il est important de ne pas cofondre $^*X$ et l'ensemble $\{{}^*x : x \in X\}$. Toutefois pour alléger les notations, ce dernier sera également noté X. Ainsi on aura $X \subset {}^*X$.

Tout objet X considéré (ensemble) sera supposé être dans $\mathfrak{M}$, son extension $^*X$ sera dite standard. S'il est dans $^*\mathfrak{M}$, un objet sera dit interne, sinon il sera externe.

Dans toute la suite α sera un cardinal **infini**.
ω est le cardinal infini dénombrable.
X étant un ensemble, on note $|X|$ son cardinal,

$P(X)$ l'ensemble des parties de X,

$P_\beta(X) = \{ Y \subset X : |Y| < \beta\}$.

Cependant si A et n sont internes, P(A) (resp. $P_n(A)$) sera l'ensemble des parties internes de A (resp. l'ensemble des parties internes de A de moins de n éléments), sinon on précisera : l'ensemble externe de toutes les parties de A.

Un α-ensemble est un ensemble de moins de α éléments (au sens large). Une famille de parties vérifiant la propriété de l'intersection finie non vide sera dite FC (finiement concourante).

Filtres

Soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{T})$ un espace topologique et x un élément de $\mathfrak{X}$. On appelle poids de $\mathfrak{X}$ au point x le plus petit cardinal permettant d'indexer un système fondamental de voisinages de x, on le note w(x). De même, on appelle poids d'un filtre F le plus petit cardinal w(F) des bases de F.

exemples : 1 si $\mathfrak{X}$ est un espace métrique $w(x) \leq \omega$.
2 x est isolé ssi $w(x)=1$.

X étant un ensemble on note F(X) l'espace des filtres sur X muni de la topologie canonique définie par la base d'ouverts : $\{\overline{Y} : Y \in P(X)\}$ où $\overline{Y} = \{F \in F(X) : Y \in F\}$.
On pose alors $F_\alpha(X) = \{F \in F(X) : w(F) \leq \alpha\}$

On a des notations analogues pour l'espace $\beta(X)$ des ultrafiltres sur X. Ainsi un élément de $\beta_\alpha(X)$ est un ultrafiltre sur X pouvant être défini à partir de moins de α de ses éléments.

F étant un filtre sur un ensemble X,
on pose $\|F\| = \mathrm{Inf}\{|Y| : Y \in F\}$, $\|F\|$ est appelée épaisseur de F.
Si $\|F\| = |X|$ alors F est dit uniforme sur X.
L'épaisseur d'un filtre apparaît comme l'ensemble minimum pouvant le supporter. Cette notion s'impose naturellement lorsqu'on considère des ultrapuissances, dans ce cas l'ultrafiltre qui génère l'ultrapuissance peut toujours être supposé uniforme.

Saturation standard ou régularité

F étant un filtre sur un ensemble M, la famille $({}^*Y)_{Y \in F}$ est alors un filtre (externe) de parties standards de *M. On appelle monade de F l'intersection des éléments de ce filtre, ainsi $\mathrm{Monad}(F) = \bigcap_{Y \in F} {}^*Y$

Les notions de poids et de monade permettent alors de définir la saturation standard de la façon suivante :

définition : *M est α-régulier ssi $\forall$ F $\in$ $F_\alpha(M)$, Monad(F) $\neq \varnothing$.

remarques :

-1- Je parlerai aussi bien de saturation de $*\mathfrak{M}$ que de *M, la saturation de $*\mathfrak{M}$ signifiant celle de *M pour tout M.

-2- définition équivalente : *M est α-régulier ssi toute α-famille FC de parties standards de *M est concourante (d'intersection non vide).

-3- Deux ultrafiltres distincts ayant des monades disjointes, on a *M α-régulier $\Rightarrow |{*M}| \geq |\beta_\alpha(M)|$.

-4- Cas des élargissements :
*M est un élargissement de M ssi $\forall$ F $\in$ F(M), Monad(F) $\neq \varnothing$.
Ainsi,*M est un élargissement de M ssi*M est 2^α-régulier.
Dans ce cas $|{*M}| \geq |\beta(M)|$.

5- Soit F le filtre de Fréchet sur **N**, on a F$\in F_\alpha$(N), ainsi, si *N est α-régulier, la monade de F est non vide.Ceci signifie que *N $\neq$ N.

Théorème 1 : $*\mathfrak{M}$ est α-régulier ssi α est contenu dans un ensemble interne hyperfini.

dém : 1 $\Rightarrow$ 2

Posons $X_\lambda = \{S \in P_\omega(\alpha) : \lambda \in S\}$

La famille $(X_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ est FC.

Soit alors A $\in \bigcap_{\lambda\in\alpha} {*X_\lambda}$

A est hyperfini et contient α.

2 $\Rightarrow$ 1

Soit F $\in F_\alpha(X)$, F est engendré par une famille $(X_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$

Soit $(Y_\lambda)_{\lambda\in *\alpha}$ l'extension canonique de la famille $(X_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$

La famille interne $(Y_\lambda)_{\lambda\in *\alpha}$ est alors *FC.

Soit A un ensemble interne hyperfini contenant α .

On a alors $\bigcap_{\lambda\in A} Y_\lambda \neq \varnothing$, d'où $\bigcap_{\lambda\in\alpha} Y_\lambda \neq \varnothing$,

et donc Monad(F) $\neq \varnothing$.

Proposition 1 : Soit M un ensemble infini,
si $*M$ est α-régulier alors $|*M| \geq |M|^{\alpha}$.

dém : Toute application $f : \alpha \longrightarrow M$ se prolonge en une application interne $F : A \longrightarrow *M$ avec A contenant α.
Le choix d'un tel prolongement permet de définir une injection de $M^{\alpha} \hookrightarrow *M^{A}$,
$*M^{A}$ étant l'ensemble des applications internes de A dans $*M$.
de plus A étant fini et $*M$ infini, $*M$ et $*M^{A}$ ont même cadinal interne, et donc même cardinal externe, d'où le résultat.

Proposition 2 : Si $*\mathbb{N}$ est α-regulier alors tout entier n assez grand vérifie $|n| = |n|^{\alpha}$.

Remarques : Les ultrafiltres qui génèrent des ultrapuissances α-regulières sont dits α-reguliers. Il est facile de voir que si un $\mathcal{U}$ est α-régulier sur α (on dit simplement que $\mathcal{U}$ est régulier) alors $\mathcal{U}$ est uniforme, la réciproque étant fausse en général. Il existe cependant un modèle de ZFC, "the core model", où tous les ultrafiltres uniformes sont réguliers.

Saturation interne ou bonitude

La saturation interne se définit comme la saturation standard, à la différence que les filtres considérés (externes) ne sont plus faits de parties standards mais de parties internes.

définition : $*M$ est α-bon ssi $\forall F \in F_{\alpha}(*M) : \bigcap_{Y \in F} Y \neq \varnothing$.

remarques :
-1- définition équivalente : $*M$ est α-bon ssi toute α-famille FC de parties internes est concourante.
-2- Si $*M$ est α-bon alors $|*M| \geq |\beta_{\alpha}(*M)|$.

Proposition3 : $*\mathcal{M}$ est α-bon ssi pour tout A interne contenant $P_{\omega}(\alpha)$, il existe B interne tq $P_{\omega}(\alpha) \subset P(B) \subset A$.

dem : $1 \Rightarrow 2$: Soit $F \in F_{\alpha}(*M)$,
F est engendré par une famille de parties internes $(X_{\lambda})_{\lambda \in \alpha}$.
Soit $(X_{\lambda})_{\lambda \in *\alpha}$ un prolongement interne de cette famille

Posons $A = \left\{ S \in {}^*P(\alpha) : \bigcap_{\lambda \in S} X_\lambda \neq \emptyset \right\}$

On a $P_\omega(\alpha) \subset A$, soit alors B interne tq $P_\omega(\alpha) \subset P(B) \subset A$.

On a alors $\bigcap_{\lambda \in B} X_\lambda \neq \emptyset$, d'où $\bigcap_{\lambda \in \alpha} X_\lambda \neq \emptyset$,

et donc Monad(F) $\neq \emptyset$.

$2 \Rightarrow 1$: Soit A interne contenant $P_\omega(\alpha)$.

Posons $X_\lambda = \{ S \in {}^*P(\alpha) : \lambda \in S \text{ et } P(S) \subset A \}$

$(X_\lambda)_{\lambda \in \alpha}$ est FC, soit $B \in \bigcap_{\lambda \in \alpha} X_\lambda$,

on a alors $P\omega(\alpha) \subset P(B) \subset A$.

Considérons à présent les cinq propriétés suivantes :

-1- B(α) : tout ensemble interne A contenant le carré cartésien α^2 contient un carré cartésien interne B^2 contenant α^2.

-2- $B_n(\alpha)$: pour tout ensemble interne A contenant $P_n(\alpha)$, il existe B interne tel que $P_n(\alpha) \subset P_n(B) \subset A$.

–3– **J(α) :** B étant interne, toute injection $g : \alpha \hookrightarrow B$ se prolonge en une injection interne $G : A \hookrightarrow B$ avec A interne contenant α.

-4- **I(α) :** Pour toute famille $(A_\lambda)_{\lambda \in \alpha}$ de parties internes contenant α, il existe B interne tq $\alpha \subset B \subset \bigcap_{\lambda \in \alpha} A_\lambda$.

-5- FR(α) : pour tout entier illimité n, il existe un ensemble interne à n éléments contenant α .

On a alors le shéma d'implications suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathbf{I}(\alpha) & & & & & & \\ & & \Uparrow & & & & & & \\ {}^*\mathfrak{M} \text{ est } \alpha \text{ bon} & \Leftrightarrow & \mathbf{B}(\alpha) & \Rightarrow & (\mathbf{J}(\alpha) \text{ et } {}^*\mathbb{N} \neq \mathbb{N}) & \Rightarrow & \mathbf{FR}(\alpha) & \Rightarrow & \mathbf{R}(\alpha) \\ & & \Updownarrow & & & & & & \\ & & \mathbf{B}_n(\alpha) \text{ avec } n>1 & & & & & & \end{array}$$

Remarque : Toutes ces propriétés sont héréditaires, (i.e) si $P(\alpha)$ désigne l'une d'entre elles alors on a : $(\beta \leq \alpha) \Rightarrow (P(\alpha) \Rightarrow P(\beta))$.

Proposition 4 : $B(\alpha) \Longleftrightarrow B_n(\alpha)$ avec $n>1$.
dem: par récurrence, laissée au soin du lecteur.

Proposition 5 : $^*\mathfrak{M}$ est α bon $\Rightarrow B(\alpha)$.
dem : on va montrer que $^*\mathfrak{M}$ est α bon $\Rightarrow B_2(\alpha)$.

Soit A interne contenant $P_2(\alpha)$.
On peut supposer que $A \subset P_2(^*\alpha)$.
Posons $D = A \cup (^*P(\alpha) / P_2(\alpha))$, on a $P\omega(\alpha) \subset D$.
Il existe alors B interne tq $P\omega(\alpha) \subset P(B) \subset D$.
En particulier $\alpha \subset B$ et $P_2(\alpha) \subset P_2(B) \subset D$,
par construction on a $P_2(B) \subset A$, d'où $P_2(\alpha) \subset P_2(B) \subset A$.

Proposition 6 : $B(\alpha) \Rightarrow J(\alpha)$.
dem: Soit A un ensemble interne et

$f: \alpha \hookrightarrow A$ une injection .
Soit $F : {}^*\alpha \hookrightarrow A$ un prologement interne de j.
Posons $S = \{ (\lambda,\mu) \in {}^*\alpha \times {}^*\alpha : F(\lambda) \neq F(\mu) \}$
On a $\alpha^2 \subset S$, il existe alors B interne tq $\alpha^2 \subset B^2 \subset S$.
Ainsi F est injective sur B.

Proposition 7 : $(J(\alpha)$ et $^*\mathbb{N} \neq \mathbb{N}) \Rightarrow FR(\alpha)$.
dem : -1- Soit B un ensemble interne de cardinal externe β.

On va montrer que si $\beta \leq \alpha$ alors B est fini (limité).
Supposons donc que $\beta \leq \alpha$.
Soit alors une bijection $h : B \longrightarrow \beta$.
On peut considérer que h prend ses valeurs dans $^*\beta$
h se prolonge alors en une injection interne $H : B \hookrightarrow {}^*\beta$
Mais alors $H = h$, et $\beta = H(B)$ est un ensemble interne, et comme $^*\mathbb{N} \neq \mathbb{N}$, β et donc B sont nécessairement des ensembles finis.
-2- Soit maintenant un entier illimité,
d'après ce qui précède, son cardinal externe est supérieur à α. Considérons alors une injection $f: \alpha \hookrightarrow n$,
elle se prolonge en une injection interne $F : A \hookrightarrow n$
ainsi A possède moins de n éléments et contient α.

Proposition 8 : $FR(\alpha) \Rightarrow R(\alpha)$.
dem : immédiat avec le théorème 1.

Proposition 9 : $B(\alpha) \Rightarrow I(\alpha)$.
dem : soit $(X_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ une famille de parties internes contenant α .
Soit alors $(X_\lambda)_{\lambda\in {}^*\alpha}$ un prolongement interne de cette famille
Posons $A = \bigcup_{\lambda\in\alpha} \{\lambda\} \times X_\lambda$,
$\alpha^2 \subset A$, il existe alors B interne tq $\alpha^2 \subset B^2 \subset A$,
et on a $\alpha \subset B \subset \bigcap_{\lambda\in\alpha} X_\lambda$.

Proposition 10 : $B(\alpha) \Rightarrow {}^*\mathfrak{M}$ est α-bon.
dem : Soit A interne contenant $P\omega(\alpha)$
$P\omega(\alpha) \subset A \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\alpha) \subset A$
(Prop 4) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists\ A_n$ interne tq $P_n(\alpha) \subset P_n(A_n) \subset A$
(Prop 9) $\Rightarrow \exists$ B interne tq $\forall n \in \mathbb{N}\ \ P_n(\alpha) \subset P_n(B) \subset A$
$({}^*\mathbb{N} \neq \mathbb{N}) \Rightarrow \exists$ N illimité tq $P\omega(\alpha) \subset P_N(B) \subset A$
De plus comme $B(\alpha) \Rightarrow FR(\alpha)$, il existe D interne de moins de N éléments contenant α. On a alors $P\omega(\alpha) \subset P(B \cap D) = P_N(B \cap D))$ $\subset P_N(B) \subset A$.
Ainsi $P\omega(\alpha) \subset P(B \cap D) \subset A$ et donc ${}^*\mathfrak{M}$ est α-bon (prop 3).

Proposition 11 : Si ${}^*\mathbb{N}$ vérifie $FR(\alpha)$ alors tout entier n illimité vérifie $|n| = |n|^\alpha$.

Remarques :

-1- Les ultrafiltres qui génèrent des modèles α-bons sont dits α-bons. Sur tout cardinal α , il existe un ultrafiltre α-bon. Leur existence a été démontrée en trois étapes par Keisler, Blass et khunen.

-2- Les ultrafiltres qui génèrent des ultrapuissances $FR(\alpha)$ sont dits α-fortement-réguliers.

-3- On a donc en particilier : ${}^*\mathfrak{M}$ α-bon $\Rightarrow$ α est contenu dans un ensemble interne fini illimité arbitrairement petit.
La question de la réciproque se pose alors. En général elle est fausse, en effet, il suffit de considérer un modèle de l'arithmétique dénombrable non standard. Un tel modèle est $FR(\omega)$ sans être $B(\omega)$.

-4- La recherche d'un modèle $B(\omega)$ qui serait $FR(\alpha)$ sans être $B(\alpha)$ est plus difficile, cela revient à trouver pour les ultrapuissances un ultrafiltre $FR(\alpha)$ non $B(\alpha)$.

Références :

M. Benda On reduced products and filters.
Ann. Math. Logic. 4, 1-29,1972.

H. J. Keisler On the cardinalitie of ultraproducts.
Bull. Ann. Math. Soc. V.70, 644-647, 1964.

H. J. Keisler Ultraproduct of finite set.
J.Sym.Logic. V.32, N.1, March 1967.

H. J. Keisler A result concerning cardinalities of ultraproducts.
J.Sym.Logic. V.39, N.1, March 1972.

Philippe VESCHAMBRE
UFR de Psychologie
Université Blaise Pascal
34, av. Carnot
63000 Clermont-Ferrand