ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

BRAHIM HAJOUJ

Perturbations singulières d'équations hyperboliques du second ordre non linéaires

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 7, nº 1 (2000), p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_2000__7_1_1_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 7, N° 1, 2000, pp.1-22

Perturbations Singulières d'Equations Hyperboliques du Second Ordre Non Linéaires

Brahim Hajouj

Département de mathématiques, Ecole Normale Supérieure, B.P. S / 41, Marrakech, Maroc.

Abstract: The behavior, when $\varepsilon \to 0_+$, of the solution of an hyperbolic variatonal equality relative to the degenerate operator L_ε defined by:

$$L_\varepsilon v = \varepsilon\, k(x,t,v)v'' - \Delta v + \gamma\,|v'|^\rho\, v' + \alpha v' + \beta\frac{\partial v}{\partial x} - f = 0$$

is considered.

1- Introduction

Dans ce papier on considère un problème de la théorie de la résistance des matériaux à mémoire (N. A. Lar'kin [7]) gouverné par l'équation hyperbolique $L_\varepsilon v = 0$ présentant des non linéarités dans les termes relatifs aux dérivés partielles de v par rapport au temps et pouvant dégénérer en une équation parabolique dans toute partie du domaine où v s'annule.

Dans un premier temps on s'intéresse au problème de l'existence et de l'unicité pour l'équation dégénérée en temps $L_\varepsilon v = 0$, puis on étudie le comportement quand $\varepsilon \to 0_+$ de la solution de ce problème. Nous prenons appui sur les résultats antérieurs de B. Hajouj [5] et N.A. Lar'kin [7] obtenus sur l'équation $L_\varepsilon v = 0$ lorsque k est minorée par une constante strictement positive.

Divers auteurs ont étudié des problèmes similaires soit d'existence et d'unicité. soit de perturbations singulières; citons par exemple les travaux de J. L. Lions and W.A. Strauss [13], N.A. Lar'kin [8] et [9], J. L. Lions [10], S. C. Chikuwendu and J. Kevorkian [2], A. Benaouda et M. Madaune-Tort [1], G.C. Hsiao and R. J. Weinacht [6], A. Milani [14], V. Georgiev and G. Todorova [4] et de E. Feireisl [3].

Cependant, la situation où l'équation $L_\varepsilon v = 0$ peut dégénérer n'a pas été, à notre connaissance, encore examinée ni de point de vue existence et unicité ni du point de vue perturbations singulières, hormis lorsque les conditions initiales sont nulles ([5] et [7]). L'objet de cet article est d'apporter des éléments de réponse lorsque les conditions initiales vérifient certaines conditions de compatibilité assurant l'existence d'une solution forte et par conséquent l'unicité de cette solution.

On désigne par Ω l'intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, $a < b$, par T un reél donné, $T > 0$ et par Q le pavé ouvert $\Omega \times]0,T[$. Les dérivés de u par rapport au temps t, au sens des distributions vectorielles, sont représentées par $u', u'', u''', \ldots$. Enfin, on introduit la notation $(u,v) = \int\limits_\Omega uv dx$. On utilise aussi cette notation $(.,.)$ pour désigner le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le problème variationnel hyperbolique P_ε d'inconnue u_ε:

$$P_\varepsilon \left\{ \begin{array}{ll} & u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)),\ u'_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)), \\ & \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \text{p.p. } t \in]0,T[, \\ (1) & (\varepsilon k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon, v) + (\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}) + (h(u'_\varepsilon), v) + (\beta \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}, v) = (f,v), \\ & u_\varepsilon(x,0) = u_0(x),\ u'_\varepsilon(x,0) = u_1(x),\ \text{ p.p. } x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où les données vérifient les hypothèses:

$$H \left\{ \begin{array}{ll} (2) & h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est définie par: } h(v) = \alpha v + \gamma |v|^\rho v,\ \alpha > 0,\ \gamma > 0,\ \rho \geq 1, \\ & k : Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ est une fonction de classe } C^1 \text{ telle que :} \\ (3) & C_0 |v|^\ell \leq k(x,t,v) \leq C_1 |v|^\ell,\ |k'_t(x,t,v)| \leq C_1 |v|^\ell,\ |k'_v(x,t,v)| \leq C_1 |v|^{\ell-1}, \\ & C_0 > 0,\ C_1 > 0,\ 1 \leq \ell \leq \rho, \\ (4) & \varepsilon > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ f \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega)) \text{ telle que } f' \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega)), \\ (5) & u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ u_1 \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right.$$

et les conditions initiales sont telles que:

$$H_1 \left\{ \begin{array}{ll} & \text{il existe } g \in L^2(\Omega) \text{ telle que: la fonction } \Phi \text{ définie par:} \\ & \Phi = \Delta u_0 + f(x,0) - h(u_1) - \beta \dfrac{\partial u_0}{\partial x}, \text{ vérifie la condition:} \\ (6) & \qquad |\Phi(x)| \leq |g(x)|\,|u_0(x)|^{\frac{\ell}{2}} \ \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Dans le cas où l'équation hyperbolique (1) n'est pas dégénérée en une équation parabolique, l'éxistence de la solution pour le problème P_ε est établit dans [5] et [7], à l'aide d'une méthode de Galerkin lorsque les hypothèses $H(2)$, $H(4)$ et $H(5)$ sont satifaites.

L'hypothèse $H(3)$ entraîne que $k(x,t,0) = 0$, et l'équation (1) peut dégénérer en une équation parabolique dans toute partie du domaine où $u_\varepsilon = 0$. Dans ce cas, l'éxistence de la solution pour le problème P_ε est établit dans ce papier, en utilisant une méthode de régularisation, elle consiste à approcher la fonction k par la suite de fonctions $(k+\delta)_{\delta>0}$, et le triplet (u_0, u_1, f) par une suite de triplets $(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n)$ appartenant à l'espace $[H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)] \times D(\Omega) \times C^\infty(\overline{Q})$.

Le plan de ravail est le suivant: On établit au §2, à l'aide des hypothèses H et H_1 un résultat d'éxistence et d'unicité de la solution pour le problème P_ε, puis, on étudie au §3 son comportement lorsque $\varepsilon \to 0_+$. En particulier, on donne des estimations des normes de $u_\varepsilon - u$ et de $u'_\varepsilon - u'$ dans certains espaces de Sobolev, où u est la solution d'un problème gouverné par l'équation (1) où ε est remplacé par 0.

L'hypothèse H_1 permet de considérer une classe plus large de fonctions u_0, u_1 et $f(x,0)$ autres que $u_0 = u_1 = f(x,0) = 0$. On donne enfin du paragraphe 4, des exemples de situations où la condition $H_1(6)$ est satisfaite.

2- Existence et unicité de la solution de P_ε.

L'objet de cette partie est de justifier l'existence et l'unicité de u_ε solution du problème P_ε et d'obtenir sur cette solution des estimations a priori indépendantes de ε, le paramètre ε étant déstiné à tendre vers 0_+. Aussi, on cherche à établir ces différentes propriétés pour ε dans un voisinage de 0.

Théorème 2-1: *Sous les hypothèses H et H_1, il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ le problème P_ε admet une solution et une seule u_ε vérifiant:*

(2.0) $\sqrt{k(x,t,u_\varepsilon)}u''_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)),\quad u''_\varepsilon \in L^2(Q),\quad u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\ H^2(\Omega)).$

Démonstration du théorème 2-1 :

2-1) **Existence**:

On utilise une méthode de régularisation. Soit $\delta > 0$ et soit la fonction $k_\delta : Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $k_\delta(x,t,u) = k(x,t,u) + \delta$. La fonction k_δ est minorée par δ sur $\overline{Q} \times \mathbb{R}$, il est établit dans [5] et [7], à l'aide d'une méthode de Galerkin, que le problème $P_{\varepsilon,\delta}$ d'inconnue u_δ :

$$P_{\varepsilon,\delta}\begin{cases} & u_\delta \in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)),\ \ u'_\delta \in L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)), \\ & \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \text{p.p. } t \in]0,T[, \\ (2.1) & (k_\delta(x,t,u_\delta)u''_\delta, v) + (\dfrac{\partial u_\delta}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}) + (h(u'_\delta), v) + (\beta\dfrac{\partial u_\delta}{\partial x}, v) = (f,v), \\ & u_\delta(x,0) = u_0(x),\ \ u'_\delta(x,0) = u_1(x),\ \ \text{p.p. } x \in \Omega, \end{cases}$$

admet pour tout $\delta > 0$ une unique solution u_δ telle que:

$$u''_\delta \in L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)),\ \ u_\delta \in L^\infty(0,T;\ H^2(\Omega)). \tag{2.2}$$

On commence par établir dans le § 2-1-1) des estimations à priori sur la solution u_δ qui permettront par passage à la limite en δ, d'établir au § 2-1-2) l'existence d'une solution u_ε de P_ε. La démonstration de l'unicité de u_ε est faite dans le § 2-2).

Pour établir certaines estimations sur u_δ, $\delta \in]0,1[$ étant fixé, on introduit une suite de fonctions régulières approchant u_δ. Pour cela, on considère une suite de triplets $(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n)$ appartenant à l'espace $[H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)] \times D(\Omega) \times C^\infty(\overline{Q})$ telle que:

$$(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n) \to (u_0, u_1, f) \text{ dans } [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) \times W(0,T;\ L^2(\Omega)), \tag{2.3}$$

où $W(0,T;\ L^2(\Omega)) = \{v \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega)) \,/\, v' \in L^2(0,T;\ L^2(\Omega))\}$ muni de la norme du graphe [12], puis, on désigne par $P_{\varepsilon,\delta,n}$ le problème similaire au problème $P_{\varepsilon,\delta}$ dans lequel le triplet $(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n)$ prend la place du triplet (u_0, u_1, f). Donc d'après [5] et [7], le problème $P_{\varepsilon,\delta,n}$ admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une solution unique notée par u_n telle que:

$$u''_n \in L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)) \text{ et } u_n \in L^\infty(0,T;\ H^2(\Omega)).$$

Il suffit alors d'établir ces estimations sur u_n et de justifier la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers la solution u_δ de $P_{\varepsilon,\delta}$ pour par passage à la limite en n, en déduire les estimations sur u_δ.

Il résulte de (2.3) et de l'inclusion topologique $H_0^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, que la fonction Φ_n définie dans l'hypothèse H_1 à partir du triplet $(u_{0,n}, u_{1,n}, f_n)$ vérifie

$$\Phi_n \longrightarrow \Phi \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{2.4}$$

2-1-1) *Estimations a priori sur u_δ:*

Dans ce paragraphe, on cherche à établir non seulement des estimations a priori sur u_δ indépendantes du paramètre δ afin d'obtenir l'existence d'une solution au problème P_ε mais encore des estimations indépendantes des deux paramètres δ et ε dans le but d'étudier au §3 le comportement quand $\varepsilon \to 0_+$ de la solution de P_ε.

On convient, dans toute la suite de ce paragraphe, de désigner par C toute constante positive indépendante des paramètres δ et ε.

Lemme 2-2: *Sous les hypothèses du théorème 2-1, il existe $\varepsilon_1 \in]0,1[$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $\delta \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0,\varepsilon_1[$:*

i) $\sqrt{\varepsilon}\left\|\sqrt{k_\delta(x,t,u_\delta)}\, u'_\delta\right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))} + \|u_\delta\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'_\delta\|_{L^{p+2}(Q)} \leq C,$

ii) $\varepsilon\left\|\sqrt{k_\delta(x,t,u_\delta)}\, u''_\delta\right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\,\|u'_\delta\|_{L^\infty(0,T;\,H_0^1(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\,\|u''_\delta\|_{L^2(Q)} \leq C,$

iii) $\|u'_\delta\|_{L^2(0,T;\,H_0^1(\Omega))} + \|u'_\delta\|_{L^\infty(0,T;\,L^{p+2}(\Omega))} \leq C,$

iv) $\sqrt{\varepsilon}\left\|\sqrt{t\,k_\delta(x,t,u_\delta)}\, u''_\delta\right\|_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))} + \left\|\sqrt{t}\,u'_\delta\right\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \left\|\sqrt{t}\,u''_\delta\right\|_{L^2(Q)} \leq C.$

Preuve du lemme 2-2 :

i) On considère l'équation (2.1) du problème $P_{\varepsilon,\delta}$ dans laquelle on choisit $v = 2u'_\delta$ puis on intègre la relation obtenue de 0 à $t \in]0,T[$. Des intégrations par parties par rapport à la variable t, conduisent à:

$$\int_\Omega k_\delta(x,t,u_\delta)u'^2_\delta dx + \left\|\frac{\partial u_\delta}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\gamma\int_0^t \|u'_\delta\|^p_{L^p(\Omega)}\,d\tau + 2\alpha\int_0^t \|u'_\delta\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau \tag{2.5}$$
$$= T_0 + \varepsilon\int_0^t\int_\Omega \left[(k_\delta)'_t(x,\tau,u_\delta) + (k_\delta)'_u(x,\tau,u_\delta)u'_\delta\right] u'^2_\delta dx d\tau,$$

où $T_0 = 2\displaystyle\int_0^t (f - \beta\frac{\partial u_\delta}{\partial x}, u'_\delta)d\tau + \int_\Omega k_\delta(x,0,u_0)u_1^2 dx + \left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$

Soit $\delta \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0,1[$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$|T_0| \leq C + C\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\delta}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + \alpha\int_0^t \|u'_\delta\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau.$$

De plus, si k vérifie l'hypothèse H avec $\ell > 1$, les inégalités

$$|\varepsilon(k_\delta)'_t(x,t,u_\delta)u'^2_\delta| \le \tfrac{C_0}{C_1}\varepsilon k_\delta(x,t,u_\delta)u'^2_\delta,$$
$$|\varepsilon(k_\delta)'_u(x,t,u_\delta)u'^2_\delta| \le C_1(|u_\delta|^{\ell-1}\,|u'_\delta|^{\frac{2(\ell-1)}{\ell}})\,|u'_\delta|^{\frac{\ell+2}{\ell}},$$

et l'inégalité de Hölder-Young relative au triplet $(\frac{(\rho+2)\ell}{\rho-\ell}, \frac{\ell}{\ell-1}, \frac{(\rho+2)\ell}{\ell+2})$ entraînent:

$$\left|\varepsilon\int_0^t\int_\Omega \left[(k_\delta)'_t(x,\tau,u_\delta) + (k_\delta)'_u(x,\tau,u_\delta)u'_\delta\right] u'^2_\delta dx d\tau\right|$$
$$\le C + C\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k_\delta(x,\tau,u_\delta)u'^2_\delta dx d\tau + \gamma\int_0^t \|u'_\delta\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}\, d\tau$$

et lorsque k vérifie l'hypothèse H avec $\ell = 1$, l'inégalité de Young relative au couple $(\frac{\rho+2}{3}, \frac{\rho+2}{\rho-1})$ entraîne:

$$\left|\varepsilon\int_0^t\int_\Omega \left[(k_\delta)'_t(x,\tau,u_\delta) + (k_\delta)'_u(x,\tau,u_\delta)u'_\delta\right] u'^2_\delta dx d\tau\right|$$
$$\le C + C\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k_\delta(x,\tau,u_\delta)u'^2_\delta dx d\tau + \gamma\int_0^t \|u'_\delta\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}\, d\tau.$$

L'estimation i) découle ainsi de (2.5) grâce à ces trois majorations, au lemme de Gronwall et à l'inégalité de Poincaré.

Pour établir les estimations ii) et iii) de ce lemme 2-2, on commence par montrer que ii) et iii) sont vérifiées par la suite $(u_n)_n$ solutions des problèmes $(P_{\varepsilon,\delta,n})_n$ définis au § 2-1), puis par passage à la limite en n, on déduit les estimations ii) et iii) sur u_δ.

On remarque tout de suite qu'à partir de l'égalité (2.5) vérifiée aussi par u_n, il vient grâce à (2.3) l'estimation

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u'_n\|_{L^{\rho+2}(Q)} \le C, \tag{2.6}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de n, δ et ε.

Il résulte de (2.6), de l'inclusion topologique $H^1_0(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, de l'hypothèse $H(3)$ et de la C^1-régularité de k_δ que les fonctions $k_\delta(x,t,u_n)$, $(k_\delta)'_t(x,t,u_n)$ et $(k_\delta)'_u(x,t,u_n)$ sont bornées dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de ε, δ et n.

Maintenant, on va établir les estimations ii) et iii) sur la suite $(u_n)_n$, $\delta \in]0,1[$ étant fixé. Dans cette partie, on note C toute constante positive indépendante de $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in]0,1[$ et $\delta \in]0,1[$.

ii) On utilise une méthode de quotient différentiel. Soit $\theta \in]0,T[$ destiné à tendre vers 0. On considère les prolongements suivants des fonctions u_n, k_δ et f_n à $[-\theta,0]$:

$$(2.7)\qquad \begin{cases} u_n(x,t) = u_{0,n}(x) + tu_{1,n}(x) + \dfrac{t^2}{2}\dfrac{\Phi_n(x)}{k_\delta(x,0,u_{0,n})}, \\ k_\delta(x,t,u_n(x,t)) = k_\delta(x,0,u_n(x,t)), \\ f_n(x,t) = k_\delta(x,t,u_n)\dfrac{\Phi_n(x)}{k_\delta(x,0,u_{0,n})} - \Delta u_n + h(u_n') + \beta\dfrac{\partial u_n}{\partial x}. \end{cases}$$

On considère l'équation du problème $P_{\varepsilon,\delta,n}$ satisfaite par u_n aux instants τ et $\tau+\theta$ où τ est un réel de $]-\theta, T-\theta[$, et on choisit la fonction test égale à $v = \dfrac{\varepsilon(u_n'(\tau+\theta) - u_n'(\tau))}{\theta^2}$. On soustrait les deux égalités obtenues. Alors si pour chaque fonction $w : Q \to \mathbb{R}$ on note par $w_\theta(\tau)$ la quantité $\dfrac{1}{\theta}(w(\tau+\theta) - w(\tau))$, on obtient p.p. $t \in]-\theta, T-\theta[$:

$$(2.8)\qquad \varepsilon^2((k_\delta(x,\tau,u_n)u_n'')_\theta, u_{n,\theta}') + \varepsilon(\frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n,\theta}'}{\partial x}) + \varepsilon((h(u_n'))_\theta, u_{n,\theta}') + \varepsilon(\beta\frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}, u_{n,\theta}') = \varepsilon(f_{n,\theta}, u_{n,\theta}').$$

On intègre (2.8) de $-\theta$ à $t \in]0, T-\theta[)$, on obtient après une transformation simple du premier terme, deux intégrations par parties par rapport à t et une multiplication par 2:

$$\varepsilon^2\int_\Omega k_\delta(x,t,u_n)(u_{n,\theta}')^2dx + \varepsilon\left\|\frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon\int_{-\theta}^t((h(u_n'))_\theta, u_{n,\theta}')d\tau = 2\varepsilon\int_{-\theta}^t(f_{n,\theta}, u_{n,\theta}')d\tau$$
$$-2\varepsilon\beta\int_{-\theta}^t(\frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}, u_{n,\theta}')d\tau + \varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial x}u_{n,\theta}(-\theta)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2\int_{-\theta}^t((k(x,\tau,u_n))_\theta u_n''(\tau+\theta), u_{n,\theta}')d\tau$$
$$+\varepsilon^2\int_{-\theta}^t\int_\Omega\left[(k_\delta)_t'(x,\tau,u_n) + (k_\delta)_u'(x,\tau,u_n)u_n'\right](u_{n,\theta}')^2dxd\tau + \varepsilon^2\int_\Omega k_\delta(x,-\theta,u_n(-\theta))(u_{n,\theta}'(-\theta))^2dx.$$

Il est possible de passer à la limite en θ dans l'égalité ci-dessus grâce aux propriétés de régularité de k_δ et f_n et à la propriété $u_n' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ (resp. $u_n'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$) qui implique que $\dfrac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}$ (resp. $u_{n,\theta}'$) converge vers $\dfrac{\partial u_n'}{\partial x}$ (resp. u_n'') dans $L^q(0,T;\ L^2(\Omega))$, pour tout $q \in [1,\infty[$. Il vient, p.p. $t \in]0,T[$:

$$(2.9)\qquad \varepsilon^2\int_\Omega k_\delta(x,t,u_\delta)u_n''^2dx+\varepsilon\left\|\frac{\partial u_n'}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\varepsilon\gamma(\rho+1)\int_0^t\int_\Omega |u_n'|^\rho\, u_n''^2dxd\tau$$
$$+2\varepsilon\alpha\int_0^t \|u_n''\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau=2\varepsilon\int_0^t(f_n'-\beta\frac{\partial u_n'}{\partial x},u_n'')d\tau+\varepsilon\left\|\frac{\partial u_{1,n}}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$-\varepsilon^2\int_0^t\int_\Omega[(k_\delta)_t'(x,t,u_n)+(k_\delta)_u'(x,t,u_n)u_n']\,u_n''^2dxd\tau+\int_\Omega\frac{(\Phi_n(x))^2}{k_\delta(x,0,u_{0,n})}dx.$$

Il reste à majorer le second membre de (2.9), les fonctions $(k_\delta)_t'$ et $(k_\delta)_u'$ étant bornées dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de ε, δ et n.

On remarque que $\qquad |\varepsilon u_n' u_n''^2|=(|u_n'|\,|\varepsilon u_n''|^{\frac{2}{\rho}})\,|\varepsilon u_n''|^{\frac{\rho-2}{\rho}}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.3), l'inégalité de Young relative au triplet $(2,\rho,\frac{2\rho}{\rho-2})$ et l'estimation (2.6) entraînent:

$$\left|2\varepsilon\int_0^t(f_n'-\beta\frac{\partial u_n'}{\partial x},u_n'')d\tau-\varepsilon^2\int_0^t\int_\Omega[(k_\delta)_t'(x,t,u_n)+(k_\delta)_u'(x,t,u_n)u_n']\,u_n''^2dxd\tau\right|$$
$$\le\; C\;+C\varepsilon^2\int_0^t\|u_\delta''\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+\varepsilon\gamma(\rho+1)\int_0^t\int_\Omega|u_n'|^\rho\,u_n''^2dxd\tau.$$

Pour toute la suite on définit ε_1 par

(2.10) $\qquad \varepsilon_1=\min(1,\frac{\alpha}{C})$ où C est la constante figurant dans la dernière inégalité.

Enfin, il résulte de (2.3), (2.4) et de l'hypothèse $H_1(6)$ que:

$$\left|\varepsilon\left\|\frac{\partial u_{1,n}}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega\frac{(\Phi_n(x))^2}{k_\delta(x,0,u_{0,n})}dx\right|\le C.$$

On déduit de (2.9) grâce aux majorations précédentes que, pour tout $\varepsilon\le\varepsilon_1$, on a:

$$(2.11)\qquad \varepsilon^2\int_\Omega k_\delta(x,t,u_n)u_n''^2dx+\varepsilon\left\|\frac{\partial u_n'}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\gamma(\rho+1)\int_0^t\int_\Omega|u_n'|^\rho\,u_n''^2dxd\tau$$
$$+\varepsilon\alpha\int_0^t\|u_\delta''\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\;\le\;C+C\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial u_n'}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau.$$

Il découle de (2.11) grâce au lemme de Gronwall, l'estimation:

$$\varepsilon \left\| \sqrt{k_\delta(x,t,u_n)}\, u_n'' \right\|_{L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\, \|u_n'\|_{L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\, \|u_n''\|_{L^2(Q)} \le C. \tag{2.12}$$

iii) On considère comme dans la preuve du point ii) précédent, l'équation de $P_{\varepsilon,\delta,n}$ aux instants τ et $\tau+\theta$, mais ici on choisit la même fonction test v aux deux instants τ et $\tau+\theta$ donnée par $v = \dfrac{u_n'(\tau)}{\theta}$. On obtient alors pour p.p. $\tau \in]-\theta, T-\theta[$:

$$\varepsilon((k_\delta(x,\tau,u_n)u_n'')_\theta, u_n') + (\frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}, \frac{\partial u_n'}{\partial x}) + ((h(u_n'))_\theta, u_n') + (\beta \frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}, u_n') = (f_{n,\theta}, u_n').$$

On intègre cette dernière inégalité de $-\theta$ à $t \in]0, T-\theta[$. Après une transformation simple du premier terme et une intégration par parties par rapport à t, il vient:

$$\varepsilon(k_\delta(x,t,u_n)u_{n,\theta}', u_n') + \int_{-\theta}^{t} (\frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}, \frac{\partial u_n'}{\partial x}) d\tau + \int_{-\theta}^{t} ((h(u_n'))_\theta, u_n') d\tau = \int_{-\theta}^{t} (f_{n,\theta} - \beta \frac{\partial u_{n,\theta}}{\partial x}, u_n') d\tau$$

$$-\varepsilon \int_{-\theta}^{t} ((k_\delta(x,\tau,u_n))_\theta u_n''(\tau+\theta), u_n') d\tau + \varepsilon(k_\delta(x,-\theta,u_n(-\theta))u_{n,\theta}'(-\theta), u_n'(-\theta))$$

$$+\varepsilon \int_{-\theta}^{t} (k_\delta(x,\tau,u_n)u_{n,\theta}', u_n'') d\tau + \varepsilon \int_{-\theta}^{t} \int_{\Omega} \left[(k_\delta)_t'(x,\tau,u_n) + (k_\delta)_u'(x,\tau,u_n)u_n'\right] u_{n,\theta}' u_n' \, dx d\tau.$$

On fait tendre $\theta \to 0_+$. Dans l'inégalité obtenue le terme en β est nul puisque $u_n' \in H_0^1(\Omega)$. Après trois intégrations par parties, on obtient p.p. $t \in]0, T[$:

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u_n'}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \tfrac{\gamma(\rho+1)}{\rho+2} \|u_n'(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \tfrac{\alpha}{2} \|u_n'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^t (f_n', u_n') d\tau + \tfrac{\alpha}{2} \|u_{1,n}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ \tfrac{\gamma(\rho+1)}{\rho+2} \|u_{1,n}\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + (\Phi_n, u_{1,n}) - \varepsilon(k_\delta(x,t,u_n(t))u_n''(t), u_n'(t)) + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega k_\delta(x,\tau,u_n) u_n''^2 \, dx d\tau.$$

Pour majorer le second membre de cette dernière égalité, on remarque d'abord que la fonction $k_\delta(x,\tau,u_n)$ est bornée dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de ε, δ et n, ensuite, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les estimations (2.6) et (2.12), l'hypothèse H_1 et enfin, la propriété de convergence (2.4). Il vient:

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u_n'}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau + \gamma \tfrac{\rho+1}{\rho+2} \|u_n'(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \le C, \text{ p.p. } t \in]0, T[, \tag{2.13}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$ et $\delta \in]0, 1[$. L'inégalité de Poincaré nous permet de déduire de (2.13), l'estimation:

$$\|u_n'\|_{L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega))} + \|u_n'\|_{L^\infty(0,T;\, L^{p+2}(\Omega))} \leq C. \tag{2.14}$$

Maintenant, nous allons établir les estimations ii) et iii) du lemme 2-2 sur u_δ.
Il résulte des estimations (2.6) et (2.12) l'existence d'une sous suite extraite de $(u_n)_n$ notée encore $(u_n)_n$, telle que:

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup v \quad dans \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ faible*, \\ u_n' \rightharpoonup v' \quad dans \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ faible*, \\ u_n'' \rightharpoonup v'' \quad dans \quad L^2(Q) \ faible. \end{cases} \tag{2.15}$$

Pour prouver que v est une solution du problème $P_{\varepsilon,\delta}$, on remarque d'abord grâce aux résultats de compacité classiques (ils seront développés au paragraphe 2-1-2)) que les propriétés de convergence faibles (2.15) entraînent des propriétés de convergence fortes qui sont suffisantes pour passer à la limite sur les termes non linéaires de l'équation du problème $P_{\varepsilon,\delta,n}$. Les conditions initiales sont obtenues sans difficulté grâce à (2.3). On déduit alors d'une part l'égalité $v = u_\delta$, où u_δ est la solution de $P_{\varepsilon,\delta}$ et d'autre part, par passage à la limite inférieure sur n dans les inégalités (2.12) et (2.14), les estimations ii) et iii) du lemme 2-2 sur u_δ.

iv) On considère à nouveau l'égalité (2.8) satisfaite aussi par la solution u_δ du problème $P_{\varepsilon,\delta}$, puis on la multiplie par $\dfrac{\tau}{\varepsilon}$ et on intègre de 0 à $t \in \,]0,T[$. Il vient après une transformation simple du premier terme et des intégrations par parties par rapport à t:

$$\varepsilon t(k_\delta(x,t,u_\delta)u_{\delta,\theta}', u_{\delta,\theta}') + t\left\|\frac{\partial u_{\delta,\theta}}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_0^t \tau((h(u_\delta'))_\theta, u_{\delta,\theta}')d\tau \tag{2.16}$$
$$= 2\int_0^t \tau(f_\theta - \beta\frac{\partial u_{\delta,\theta}}{\partial x}, u_{\delta,\theta}')d\tau + \int_0^t \left\|\frac{\partial u_{\delta,\theta}}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau - 2\varepsilon\int_0^t \tau((k_\delta(x,\tau,u_\delta))_\theta u_\delta''(\tau+\theta), u_{\delta,\theta}')d\tau$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k_\delta(x,\tau,u_\delta)u_{\delta,\theta}'^2 dxd\tau + \varepsilon\int_0^t\int_\Omega \tau\left[(k_\delta)_t'(x,\tau,u_\delta) + (k_\delta)_u'(x,\tau,u_\delta)u_\delta'\right]u_{\delta,\theta}'^2 dxd\tau.$$

On fait tendre $\theta \to 0_+$ dans (2.16). Il vient, p.p. $t \in \,]0,T[$,

$$\varepsilon t\int_\Omega k_\delta(x,t,u_\delta)u_\delta''^2dx+t\left\|\frac{\partial u_\delta'}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\gamma(\rho+1)\int_0^t\int_\Omega\tau\left|u_\delta'\right|^\rho u_\delta''^2dxd\tau+2\alpha\int_0^t\tau\left\|u_\delta''\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau$$
$$=2\int_0^t\tau(f'-\beta\frac{\partial u_\delta'}{\partial x},u_\delta'')d\tau-\varepsilon\int_0^t\int_\Omega\tau\left[(k_\delta)'_t(x,\tau,u_\delta)+(k_\delta)'_u(x,\tau,u_\delta)u_\delta'\right]u_\delta''^2dxd\tau$$
$$+\int_0^t\left\|\frac{\partial u_\delta'}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega k_\delta(x,\tau,u_\delta)u_\delta''^2dxd\tau.$$

Une étude analogue à celle faite sur l'égalité (2.8) permet d'obtenir à l'aide des estimations ii) et iii) du lemme 2-2, l'inégalité:

$$\varepsilon t\int_\Omega k_\delta(x,t,u_\delta)u_\delta''^2dx+t\left\|\frac{\partial u_\delta'}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\int_0^t\tau\left\|u_\delta''\right\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\le C,\text{ p.p. } t\in\,]0,T[,$$

où $C>0$ est une constante indépendante de $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_1[$ et de $\delta\in\,]0,1[$.

L'estimation iv) découle de cette dernière inégalité grâce à l'inégalité de Poincaré. Ce qui achève la preuve du lemme 2-2. ∎

2-1-2) *Convrgence faible sous les hypothèses H et H_1*

On déduit des estimations a priori i) et ii) du lemme 2-2, que pour tout $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_1[$, il existe une suite extraite de $(u_\delta)_{\delta>0}$ notée encore $(u_\delta)_{\delta>0}$ et une fonction u_ε telles que:

$$(2.17)\qquad\begin{cases}u_\delta\rightharpoonup u_\varepsilon & \textit{dans}\quad L^\infty(0,T;\,H_0^1(\Omega))\ \textit{faible}*,\\ u_\delta'\rightharpoonup u_\varepsilon' & \textit{dans}\quad L^\infty(0,T;\,H_0^1(\Omega))\ \textit{faible}*,\\ u_\delta''\rightharpoonup u_\varepsilon'' & \textit{dans}\quad L^2(Q)\ \textit{faible}.\end{cases}$$

Condition initiale satisfaites par u_ε: Pour tout espace de Hilbert X, l'espace vectoriel $\{v\ /\ v\in L^2(0,T;\,X)$ et $v'\in L^2(0,T;\,X)\}$ muni de la norme du graphe est inclus dans $C([0,T]\,;\,X)$ et l'application injection est continue. Il découle ainsi de (2.17) que:

$$\begin{cases}\forall t\in[0,T]\,,\ u_\delta(t)\rightharpoonup u_\varepsilon(t) & \textit{faible dans}\ H_0^1(\Omega),\\ \forall t\in[0,T]\,,\ u_\delta'(t)\rightharpoonup u_\varepsilon'(t) & \textit{faible dans}\ H_0^1(\Omega),\end{cases}$$

d'où les égalités :

$$u_\varepsilon(x,0)=u_0(x)\text{ p.p. } x\in\Omega\ \text{ et }\ u_\varepsilon(x,0)=u_1(x)\text{ p.p. } x\in\Omega.$$

Convergence forte- L'injection de $\{v;\ v \in L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega))\ /\ v' \in L^2(Q)\}$ muni de la norme du graphe dans $L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega}))$, est compacte (cf. J.L. Lions [10], chap.1, §.5). On déduit donc des résultats (2.17) les propriétés de convergence forte:

$$\left\{\begin{array}{l} u_\delta \to u_\varepsilon \ \ dans\ \ L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega}))\ , \\ u'_\delta \to u'_\varepsilon \ \ dans\ \ L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega}))\ . \end{array}\right. \tag{2.18}$$

En observant que les fonctions k et h sont de classe C^1 donc lipschitziennes sur tout borné de $\mathbb{R}$ d'une part et en extractant d'autre part une nouvelle sous suite notée encore $(u_\delta)_{\delta>0}$, en utilisant la continuité des fonctions k et h et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient:

$$\left\{\begin{array}{l} u_\delta \to u_\varepsilon \ \text{ dans } L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q),\ \forall q \in [1,\infty[, \\ u'_\delta \to u'_\varepsilon\ ,\ h(u'_\delta) \to h(u'_\varepsilon) \text{ dans } L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q),\ \forall q \in [1,\infty[, \\ k_\delta(x,t,u_\delta) \to k(x,t,u_\varepsilon) \text{ dans } L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega})) \text{ et dans } L^q(Q),\ \forall q \in [1,\infty[. \end{array}\right. \tag{2.19}$$

De plus, il résulte de l'estimation ii) du lemme 2-2 et de la propriété (2.19) la convergence

$$\sqrt{k_\delta(x,t,u_\delta)}\,u''_\delta \rightharpoonup \sqrt{k(x,t,u_\varepsilon)}\,u''_\varepsilon \ \ dans\ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\ \ faible *. \tag{2.20}$$

A l'aide des propriétés (2.17), (2.19) et (2.20), on peut passer à la limite en δ dans l'équation (2.1) du problème $P_{\varepsilon,\delta}$. On déduit alors que u_ε est une solution de P_ε. De plus, l'équation (1) entraîne grâce à la régularité sur u_ε, k et f, la propriété: $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\ H^2(\Omega))$.

Nous venons de montrer que u_ε est une solution du problème P_ε qui vérifie (2.0).

2-2) Unicité de la solution du problème P_ε :

Soient u_ε et w_ε deux solutions du problème P_ε vérifiant (2.0). On choisit $v = w'_\varepsilon - u'_\varepsilon$ dans l'égalité (1) satisfaite par u_ε (resp. w_ε). On soustrait les deux égalités obtenues. On note par $s_\varepsilon = u_\varepsilon - w_\varepsilon$. Il vient:

$$(\varepsilon k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon - \varepsilon k(x,t,w_\varepsilon)w''_\varepsilon,\ s'_\varepsilon) + (\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial s'_\varepsilon}{\partial x}) + (h(u'_\varepsilon) - h(w'_\varepsilon),\ s'_\varepsilon) + (\beta\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x},\ s'_\varepsilon) = 0.$$

On intègre cette égalité de 0 à t. On obtient après une transformation du premier terme, deux intégrations par parties par rapport à t et grâce à la monotonie de l'application: $x \to |x|^\rho x$:

$$(2.21)\qquad \varepsilon\int_\Omega k(x,t,u_\varepsilon)s_\varepsilon'^2dx+\left\|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+2\alpha\int_0^t\|s_\varepsilon'\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\le-2\beta\int_0^t(\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x},s_\varepsilon')d\tau$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega\left[k_t'(x,t,u_\varepsilon)+k_u'(x,t,u_\varepsilon)u_\varepsilon'\right]s_\varepsilon'^2dxd\tau-2\varepsilon\int_0^t(\left[k(x,t,u_\varepsilon)-k(x,t,w_\varepsilon)\right]w_\varepsilon'',s_\varepsilon')d\tau.$$

Dans toute la preuve, on convient de noter C toute constante positive. L'inclusion algébrique et topologique $H_0^1(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$ entraîne que u_ε et u_ε' (resp. w_ε et w_ε') sont dans $L^\infty(Q)$. Il résulte alors du théorème de la valeur moyenne et de l'inégalité de Poincaré la relation: $|k(u_\varepsilon)-k(w_\varepsilon)|\le C\left\|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$ et par conséquent la majoration:

$$\left|-2\beta\int_0^t(\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x},s_\varepsilon')d\tau+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega\left[k_t'(x,t,u_\varepsilon)+k_u'(x,t,u_\varepsilon)u_\varepsilon'\right]s_\varepsilon'^2dxd\tau\right|$$
$$+\left|-2\varepsilon\int_0^t(\left[k(x,t,u_\varepsilon)-k(x,t,w_\varepsilon)\right]w_\varepsilon'',s_\varepsilon')d\tau\right|\le C\int_\Omega(1+\|w_\varepsilon''\|^2_{L^2(\Omega)})\left\|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dx$$
$$+(C\varepsilon+\alpha)\int_0^t\|s_\varepsilon'\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau.$$

On déduit de (2.21) grâce à cette dernière inégalité la relation

$$(2.22)\qquad \left\|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\int_0^t\|s_\varepsilon'\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau\le C\int_\Omega(1+\|w_\varepsilon''\|^2_{L^2(\Omega)})\left\|\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)}dx+C\varepsilon\int_0^t\|s_\varepsilon'\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau.$$

On pose $\varepsilon_2=\frac{\alpha}{C}$ où C est la constante positive figurant dans (2.22). Il résulte de (2.22) à l'aide du lemme de Gronwall et de la propriété $w_\varepsilon''\in L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega))$ que pour tout $\varepsilon<\varepsilon_2$, $s_\varepsilon'=0$ sur Q, d'où $u_\varepsilon=w_\varepsilon$. On peut donc énoncer le théorème 2-1 où $\varepsilon_0=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, ε_1 ayant été déterminé au lemme 2-2 par (2.10). ■

3- Perturbations hyperbolique-parabolique relative au problème P_ε

On suppose dans ce paragraphe que les conditions H et H_1 sont satisfaites.

3-1) Premiers résultats de convergence :

On déduit du lemme 2-2 et des propriétés (2.17), (2.19) et (2.20) les estimations a priori sur u_ε :

Corollaire 3-1: *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$:*

i) $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega))} + \|u'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega))} + \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\, L^{\rho+2}(\Omega))} \leq C,$

ii) $\varepsilon \left\| \sqrt{k(x,t,u_\varepsilon)}\, u''_\varepsilon \right\|_{L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\, \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\, \|u''_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C,$

iii) $\sqrt{\varepsilon} \left\| \sqrt{t\, k(x,t,u_\varepsilon)}\, u''_\varepsilon \right\|_{L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega))} + \left\|\sqrt{t}\, u'_\varepsilon\right\|_{L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))} + \left\|\sqrt{t}\, u''_\varepsilon\right\|_{L^2(Q)} \leq C.$

En outre, il résulte des estimations i) et ii) du corollaire 3-1, l'estimation:

$$(3.1) \qquad \|\varepsilon k(x,t,u_\varepsilon) u''_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{où } C > 0, \text{ est indépendante de } \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Grâce au corollaire 3-1, on peut extraire une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ notée encore $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et définir une fonction u telles que:

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ \textit{faible}*, \\ u'_\varepsilon \rightharpoonup u' \ \textit{dans} \ L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ \textit{faible et dans} \ L^\infty(0,T;\, L^{\rho+2}(\Omega)) \ \textit{faible}*, \\ tu'_\varepsilon \rightharpoonup tu' \ \textit{dans} \ L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)) \ \textit{faible}*, \\ t\,u''_\varepsilon \rightharpoonup \chi_1 \ \textit{dans} \ L^2(Q) \ \textit{faible et} \ \chi_1 = tu''. \end{cases}$$

Les propriétés de convergence faible (3.2) entraînent, grâce aux résultats de compacité classiques et au théorème de convergence dominée de Lebesgue, qu'une nouvelle suite extraite encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifie les propriétés de convergence forte suivantes:

$$(3.3) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \to u \quad \textit{dans} \quad L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \ \textit{et dans} \ L^q(Q), \ \forall q \in [1, \infty[, \\ tu'_\varepsilon \to tu' \quad \textit{dans} \quad L^2(0,T;\, C(\overline{\Omega})) \ \textit{et dans} \ L^q(Q), \ \forall q \in [1, \infty[, \\ t^{\rho+1} h(u'_\varepsilon) \to t^{\rho+1} h(u') \quad \textit{dans} \quad L^q(Q), \ \forall q \in [1, \infty[. \end{cases}$$

Les résultats (3.1), (3.2) et (3.3) permettent de faire tendre ε vers 0_+ dans l'égalité (1) et la propriété (3.2) entraîne que : $\forall t \in [0,T]$, $u_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t)$ dans $L^2(\Omega)$ faible.

La fonction limite u est alors une solution du problème P défini par:

$$P \begin{cases} u \in L^\infty(0,T;\, H_0^1(\Omega)),\ u' \in L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega)), \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \text{ p.p. } t \in]0,T[, \\ (3.4) \quad (\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}) + (h(u'), v) + (\beta \dfrac{\partial u}{\partial x}, v) = (f, v), \\ u(x,0) = u_0(x), \text{ p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

Il reste à montrer l'unicité de la solution de P.

3-2) Unicité

Lemme 3-2 : *Le problème P admet une et une seule solution.*

Preuve:

Soient u et w deux solutions du problème P. On pose $s = u - w$ et on choisit $v = u' - w'$ dans (3.4) vérifiée par u et w. On utilise la monotonie de l'application $x \to |x|^\rho x$, on obtient:

$$\left\|\frac{\partial s(t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha \int_0^t \|s'\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \leq -2\beta \int_0^t (\frac{\partial s}{\partial x}, s') d\tau,$$

puis, on utilise l'inégalité de Young et le lemme de Gronwall. Il vient $s = 0$ sur Q. En conséquence $u = w$.

3-3) **Propriétés de convergence et estimations de $u_\varepsilon - u$**

On peut maintenant énoncer à partir des propriétés (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) et du lemme 3-2 le

Théorème 3-3: *Quand $\varepsilon \to 0_+$, la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ des solutions des problèmes $(P_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge dans $L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega))$ faible $*$ vers l'unique solution u du problème P.*
$(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u dans $L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega}))$ et dans $L^q(Q)$, pour tout $q \in [1, \infty[$.
$(u'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u' dans $L^2(0,T;\ H_0^1(\Omega))$ faible et dans $L^\infty(0,T;\ L^{\rho+2}(\Omega))$ faible$*$ et $(tu''_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers tu'' dans $L^2(Q)$ faible.
$(tu'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers tu' dans $L^2(0,T;\ C(\overline{\Omega}))$ et dans $L^q(Q)$, pour tout $q \in [1, \infty[$,

et la

Propriété 3-4: *La solution u du problème P vérifie $\sqrt{t}u'' \in L^2(Q)$.*

Preuve de la propriété 3-4:

Pour chaque $\tau \in]0, T[$, on note par Q_τ le pavé ouvert $\Omega \times]\tau, T[$. Il résulte du corollaire 3-1 que: $\|\sqrt{t}\, u''_\varepsilon\|_{L^2(Q_\tau)} \leq C$, où C est evidemment indépendante de τ. On déduit alors de (3.2) que $(u''_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement dans $L^2(Q_\tau)$ vers u'' et par conséquent u'' satisfait à: $\|\sqrt{t}\, u''\|_{L^2(Q_\tau)} \leq C$. Il en résulte que $\sqrt{t}\, u'' \in L^2(Q)$.

Théorème 3-5 : *On pose* $p = \rho + 2$.

(i) $\|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'_\varepsilon - u'\|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$, (ii) $\|u'_\varepsilon - u'\|_{L^p(Q)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}}$,

(iii) $\|\Delta(u_\varepsilon - u)\|_{L^{p'}(Q)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

(iv) $\left\|t^{\frac{p}{2}}(u'_\varepsilon - u')\right\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2p}}$, (v) $\|t(u'_\varepsilon - u')\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{p^2}}$,

où $C > 0$ *est une constante indépendante de* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

Preuve :

(i) et (ii): On considère les équations (1) et (3.4) dans lesquelles on choisit respectivement $v = u'_\varepsilon - u'$. On fait une soustraction, puis on pose $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u$, on obtient:

$$(3.5) \qquad (\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial w'_\varepsilon}{\partial x}) + (h(u'_\varepsilon) - h(u'), w'_\varepsilon) = -(\varepsilon k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w'_\varepsilon) - (\beta\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}, w'_\varepsilon).$$

On intègre (3.5) de 0 à t. On majore le second membre à l'aide de l'estimation (3.1) et de l'inégalité de Young. Au premier membre, on utilise la minoration suivante (cf. J.L. Lions [11]):

$$(3.6) \qquad (|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u')w'_\varepsilon \geq \sigma\,|w'_\varepsilon|^p, \ \sigma > 0, \ \text{p.p. } (x,t) \in Q.$$

Il vient,

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\sigma\int_0^t \|w'_\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)}\,d\tau + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|w'_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau \leq \varepsilon + C\int_0^t \left\|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau.$$

Les estimations (i) et (ii) du théorème3-5, proviennent alors du lemme de Gronwall.

(iii) : On déduit des équations (1) et (3.4) que:

$$(3.7) \qquad \vartheta\,\Delta(u_\varepsilon - u) = \varepsilon k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon + h(u'_\varepsilon) - h(u') + \beta\frac{\partial(u_\varepsilon - u)}{\partial x}.$$

Il suffit alors d'estimer la norme dans $L^{p'}(Q)$ de chacun des termes du second membre de (3.7).

On observe que

$$(3.8) \qquad \|(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u')\|_{L^{p'}(Q)} \leq C\,\|u'_\varepsilon - u'\|_{L^p(Q)}.$$

En effet (3.8) résulte de la relation:

$$(3.9) \qquad |(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u')| \le C\,(|u'_\varepsilon|^\rho + |u'|^\rho)\,|u'_\varepsilon - u'| \text{ p.p. } (x,t) \in Q,$$

et de l'inégalité de Hölder avec $q = \frac{p}{p'}$ et de l'estimation i) du corollaire 3-1.

On utilise l'estimation (3.1), puis, on conclut à l'aide du théorème de la valeur moyenne, des estimations i) et ii) du théorème 3-5 et de l'estimation i) du corollaire 3-1.

(iv) et (v): On utilise une méthode de quotient différentiel. On considère un réel θ, $0 < \theta < T$, puis l'équation (1) satisfaite par u_ε aux instants τ et $\tau + \theta$, où $\tau \in]0, T-\theta[$, où l'on a choisi la fonction-test $v = \dfrac{\tau^p(u'_\varepsilon(\tau) - u'(\tau))}{\theta}$. On soustrait les deux égalités obtenues. On obtient en utilisant la notation w_θ introduite dans la preuve du lemme 2-2:

$$\tau^p\varepsilon((k(x,\tau,u_\varepsilon)u''_\varepsilon)_\theta,\, u'_\varepsilon - u') + \tau^p(\frac{\partial u_{\varepsilon,\theta}}{\partial x}, \frac{\partial(u'_\varepsilon - u')}{\partial x}) + \tau^p((h(u'_\varepsilon))_\theta,\, u'_\varepsilon - u')$$
$$+\tau^p(\beta\frac{\partial u_{\varepsilon,\theta}}{\partial x}, u'_\varepsilon - u') = \tau^p(f_\theta,\, u'_\varepsilon - u'), \text{ p.p. } \tau \in]0, T-\theta[.$$

On procède de manière analogue avec l'équation (3.4). Il vient:

$$\tau^p(\frac{\partial u_\theta}{\partial x}, \frac{\partial(u'_\varepsilon - u')}{\partial x}) + \tau^p((h(u'))_\theta, u'_\varepsilon - u') = \tau^p(f_\theta, u'_\varepsilon - u'), \text{ p.p. } \tau \in]0, T-\theta[.$$

Maintenant, on soustrait ces deux dernières égalités, puis on intègre de 0 à $t \in]0, T-\theta[$. Il vient:

$$\int_0^t \tau^p(\frac{\partial(u_{\varepsilon,\theta} - u_\theta)}{\partial x}, \frac{\partial(u'_\varepsilon - u')}{\partial x})d\tau + \int_0^t \tau^p((h(u'_\varepsilon))_\theta - (h(u'))_\theta, u'_\varepsilon - u')d\tau$$
$$= -\beta\int_0^t \tau^p(\frac{\partial(u_{\varepsilon,\theta} - u_\theta)}{\partial x},\, u'_\varepsilon - u')d\tau + \varepsilon p\int_0^t \tau^{p-1}(k(x,\tau,u_\varepsilon)u'_{\varepsilon,\theta},\, u'_\varepsilon - u')d\tau$$
$$+\varepsilon\int_0^t \tau^p((k'_t(x,\tau,u_\varepsilon) + k'_u(x,\tau,u_\varepsilon)u'_\varepsilon)u'_{\varepsilon,\theta},\, u'_\varepsilon - u')d\tau - \varepsilon\, t^p(k(x,\tau,u_\varepsilon)u'_{\varepsilon,\theta},\, u'_\varepsilon - u')$$
$$+\varepsilon\int_0^t \tau^p(k(x,\tau,u_\varepsilon)u'_{\varepsilon,\theta},\, u''_\varepsilon - u'')d\tau - \varepsilon\int_0^t \tau^p((k(x,\tau,u_\varepsilon))_\theta u''_\varepsilon(\tau+\theta),\, u'_\varepsilon - u')d\tau.$$

On fait tendre $\theta \to 0_+$. Dans l'égalité limite obtenue on pose $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u$ et on remarque que le terme en β est nul puisque u'_ε (resp. u') $\in H^1_0(\Omega)$, puis on fait deux intégrations par parties par rapport à t. On obtient p.p. $t \in]0, T[$:

$$(3.10)\qquad \int_0^t \tau^p \left\| \frac{\partial w'_\varepsilon}{\partial x} \right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + \gamma t^p(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u', w'_\varepsilon) + \tfrac{\alpha}{2} t^p \|w'_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \varepsilon p \int_0^t \tau^{p-1}(k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w'_\varepsilon)d\tau + \varepsilon \int_0^t \tau^p(k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w''_\varepsilon)d\tau - \varepsilon t^p(k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w'_\varepsilon)$$

$$+\gamma p \int_0^t \tau^{p-1}(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u', w'_\varepsilon)d\tau + \gamma \int_0^t \tau^p(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u', w''_\varepsilon)d\tau + \alpha p \int_0^t \tau^{p-1} \|w'_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau.$$

On considère $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et on désigne par C toute constante positive indépendante de ε. Comme $k(x,t,u_\varepsilon)$ et $\sqrt{t}\, u'_\varepsilon$ sont uniformément bornées dans $L^\infty(Q)$, $p > 1$, il vient à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, des estimations i), ii) et iii) du corollaire 3-1 et de l'estimation (i) du théorème 3-5 sur w'_ε :

$$(3.11)\qquad \left| \varepsilon p \int_0^t \tau^{p-1}(k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w'_\varepsilon)d\tau + \varepsilon \int_0^t \tau^p(k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w''_\varepsilon)d\tau \right|$$
$$+\alpha p \int_0^t \tau^{p-1} \|w'_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \le C\varepsilon,$$

et

$$(3.12)\qquad |\varepsilon t^p(k(x,t,u_\varepsilon)u''_\varepsilon, w'_\varepsilon)| \le C\varepsilon + \tfrac{\alpha}{2} t^p \|w'_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

En outre, on utilise en premier lieu l'inégalité de Holder avec p et p' et la propriété (3.8) puis la propriété (3.9), $\sqrt{t}\, u'_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(Q)$ indépendamment de ε, $\sqrt{t}u' \in L^\infty(Q)$, $\sqrt{t}w''_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(Q)$ indépendamment de ε, l'inégalité de Holder-Young relative au triplet $(\frac{2(\rho+2)}{\rho}, \rho+2, 2)$, l'estimation i) du corollaire 3-1, l'estimation (ii) du théorème 3-5 et le fait que $p > \frac{\varrho}{2} + \frac{1}{2}$. On obtient:

$$\left| \gamma p \int_0^t \tau^{p-1}(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u', w'_\varepsilon)d\tau + \gamma \int_0^t \tau^p(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u', w''_\varepsilon)d\tau \right| \le C(\varepsilon^{\frac{2}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}}).$$

On déduit de (3.10) grâce aux trois dernières majorations, la propriété:

$$\int_0^t \tau^p \left\| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + \gamma t^p(|u'_\varepsilon|^\rho u'_\varepsilon - |u'|^\rho u', w'_\varepsilon) \le C(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{\frac{1}{p}}).$$

Pour obtenir les estimations (iv) et (v), on utilise la minoration (3.6) et l'inégalité de Poincaré. Ce qui achève la preuve du théorème 3-5 et le § 3.

4- Quelques remarques

On donne ici des exemples de choix des données u_0, u_1, f de sorte que l'hypothèse $H_1(6)$ est satisfaite.

Pour tout réel x, on désigne par $E(x)$ la partie entière de x. On suppose que k vérifie l'hypothèse H, on va établir que la condition:

$$H_2 \begin{cases} u_0 \text{ s'anulle en un nombre fini de points } c_i \ (a = c_1 < \ldots < c_p = b) \text{ d'ordre de multip-} \\ \text{licité } m_i. \\ \text{Au voisinage de chaque point } c_i, \ \Phi \text{ est de classe } C^{\ell_i+1} \text{ où } \ell_i = E\left(\frac{m_i \ell}{2}\right) \text{ et} \\ \Phi(c_i) = \ldots = \Phi^{(\ell_i)}(c_i) = 0; \ i = 1, \ldots, p. \end{cases}$$

est suffisante pour que $H_1(6)$ soit vérifiée.

Soit $\eta > 0$ tel que $\eta < \min\left\{(\frac{c_{i+1}-c_i}{2}; \ i = 1, \ldots, p-1\right\}$. On pose

$$I_\eta = \bigcup_{1 \le i \le p-1}]c_i + \eta, c_{i+1} - \eta[. \tag{4.1}$$

On va montrer que la fonction $\Psi = \dfrac{\Phi^2}{|u_0(x)|^\ell}$ est bornée par une fonction appartenant à $L^1(\Omega)$.

D'abord, on remarque que Ψ est bornée sur I_η par la fonction $x \to (\sup\limits_{x \in I_\eta} \dfrac{1}{|u_0(x)|^\ell})(\Phi(x))^2$.
De plus, au voisinage de chaque point c_i, on considère la relation:

$$\frac{(\Phi(x))^2}{|u_0(x)|^\ell} \le \left(\frac{|x - c_i|^{m_i}}{|u_0(x)|}\right)^\ell \left[\frac{\Phi_\varepsilon(x)}{(x - c_i)^{(m_i \ell)/2}}\right]^2. \tag{4.2}$$

Le second membre de (4.2) admet une limite quand $x \to c_i$ et ceci grâce à la condition H_2 et à la formule de Taylor-Lagrange qui permet d'écrire:

$$\Phi(x) = \frac{(x - c_i)^{\ell_i+1}}{(\ell_i + 1)!} \Phi^{(\ell_i+1)}(\theta x + (1 - \theta)c_i), \ 0 < \theta < 1,$$

la fonction Ψ est donc bornée au voisinage de chaque point c_i.

On va maintenant donner des choix de fonctions u_0, u_1 et f vérifiant l'hypothèse H_2. On suppose ici $\beta > 0$. Lorsque, par exemple, u_0 s'annule uniquement aux extrémités a et b avec $m_1 = m_2 = 1$, on peut choisir $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\mathrm{Supp}(u_1) \subset I_\eta$. Donc au voisinage de a et b, Φ est réduit à $\Phi = \Delta u_0 - \beta \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + f(x,0)$. Les deux équations différentielles:

$$(E_a)\begin{cases} y : [a, a+\eta] \to \mathbb{R}, \\ y''(x) - \beta y'(x) + f(x) = 0, \\ y(a) = 0, y'(a) = C_a, C_a \in \mathbb{R}^*, \end{cases} \quad \text{et} \quad (E_b)\begin{cases} z : [b-\eta, b] \to \mathbb{R}, \\ z''(x) - \beta z'(x) + f(x) = 0, \\ z(b) = 0, z'(b) = C_b, C_b \in \mathbb{R}^*, \end{cases}$$

admettent les solutions:

$$y(x) = \int_a^x e^{\beta y}\Big(\int_a^y e^{-\beta t}(\beta C_a - f(t))dt\Big)dy + C_a(x-a),$$

$$z(x) = -\int_x^b e^{\beta y}\Big(\int_y^b e^{-\beta t}(f(t) - \beta C_b)dt\Big)dy + C_b(b-x).$$

Pour obtenir des solutions y (resp z) de (E_a) (resp (E_b)) qui ne s'annulent pas en dehors de a ou b et qui soient de signe strictement positif (resp. négatif), on suppose sur f, l'une ou l'autre des deux conditions :

(e_1) : f est majorée au voisinage de a et au voisinage de b.

(e_2) : f est minorée au voisinage de a et au voisinage de b.

Lorsque f satisfait à (e_1), on connsidère dans (E_a) et (E_b) des constantes C_a et C_b vérifiant:

$$C_a > \tfrac{1}{\beta} \max_{[a,a+\eta]} f^+(x) \text{ et } C_b > \tfrac{1}{\beta} \max_{[b-\eta,\, b]} f^+(x),$$

où $f^+ = \max(f, 0)$. On pourra donc choisir u_0 solution de (E_a) sur $]a,\, a+\eta]$, solution de (E_b) sur $[b-\eta,\, b[$ et u_0 est continue sur $[a+\eta,\, b-\eta]$ de sorte que $u_0 \in H^2(\Omega)$ et $u_0(x) > 0$ sur $]a, b[$.

Dans le cas (e_2), on pourra considérer dans les équations (1) et 2) des constantes C_a et C_b définies par:

$$C_a < -\tfrac{1}{\beta} \max_{x\in[a,\, a+\eta]} f^-(x) \text{ et } C_b < -\tfrac{1}{\beta} \max_{x\in[b-\eta,\, b]} f^-(x),$$

où $f^- = \max(-f, 0)$. On pourra donc choisir u_0 solution de (E_a) sur $]a, a+\eta]$, de (E_b) sur $[b-\eta, b[$ et u_0 est continue sur $[a+\eta, b-\eta]$ de sorte que $u_0 \in H^2(\Omega)$ et $u_0(x) < 0$ sur $]a, b[$.

On pourra traiter de même les cas $\beta < 0$ et $\beta = 0$.

Bibliographie

[1]. A. BENAOUDA et M. MADAUNE-TORT: Singular perturbations for non linear hyperbolic-parabolic problems, SIAM J. on Math. Analysis, 18,(1), 1987.

[2]. S.C. CHIKUWENDU and J. KEVORKIAN: A perturbation method for Hyperbolic Equations with small non linearities. SIAM J. Appli-Math. Vol. 22, no 2, (1972), 235-258.

[3]. E. FEIREISL: Global Attractors for Semilinear Damped Wave Equations With Supercritical Exponent. Journal of Differential Equations 116, 431-447 (1995).

[4]. V. GEORGIEV and G. TODOROVA: Existence of a solution of the Wave Equation With Nonlinear Damping and Source Terms. Journal of Differential Equations 109, 295-308 (1994).

[5]. B. HAJOUJ: Thèse de troisième cycle, Pau, (1985).

[6]. G.C. HSIAO et R.J. WEINACHT: Singular Perturbations for a Semilinear Hyperbolic Equation, Siam J. Math. Anal. 14, (6), (1983), 1168-1179.

[7]. N.A. LAR'KIN: On a class of Quasi-Linear Hyperbolic Equations Having Global Solutions. Soviet Math. Dokl. Vol. 20 (1979). No. 1.

[8]. N.A. LAR'KIN: Boundary Problems in the large for a class of Hyperbolic Equations. Translated from Sibirsk. Mat. Zhurnal, Vol 18, No. 6, pp. 1414-1419, November-December, 1977.

[9]. N.A. LAR'KIN: Global Solvability of Boundary-Value Problems For a class of Quasilinear Hyperbolic Equations. Translated from Sibirsk. Mat. Zhurnal, Vol 22, No. 1, pp. 111-119, January-February, 1981.

[10]. J.L. LIONS: Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires. Dunod. Paris (1969).

[11]. J.L. LIONS: Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en controle optimale. Lecture Notes in Mathematics, no 393, Springer-Verlag, Berlin New York, 1968.

[12]. J.L. LIONS et E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[13]. J.L. LIONS and W.A. STRAUSS: Some Non-Linear Evolutions Equations. Bull. Soc. Math. France, 93, (1965), p. 43 à 96.

[14]. A. MILANI: Long Time Existence and Singular Perturbation Results for Quasilinear Hyperbolic Equations With Small Parameter and Dissipation Term-III. Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, Vol. 16, No. 1, pp. 1-11, 1991.